Sampl

Batch PDF Me

Sampl

Batch PDF Me

جامعة عين شمس
كلية العلوم

ديناميكا

للفرقة الثانية

دكتورة
سميرة تادرس

الباب الأول

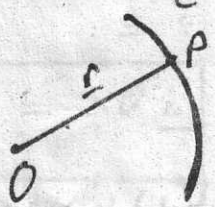
الحركة المستوية للنقطة المادية

[A]

١- متجه الموضع

عندما تتحرك نقطة مادية في الفراغ فانه موضع هذه النقطة عند اى لحظة يتعين تماما اذا علم المتجه الذى يربط هذه النقطة بنقطة اصل ثابتة في الفراغ

فمثلا نفرض أنه O نقطة اصل ثابتة في المستوى وانه P موضع النقطة المتحركة عند اللحظة t فيكون $\overrightarrow{OP}$ هو متجه الموضع عند هذه اللحظة ويرمز له عادة بالرمز $\vec{r}$

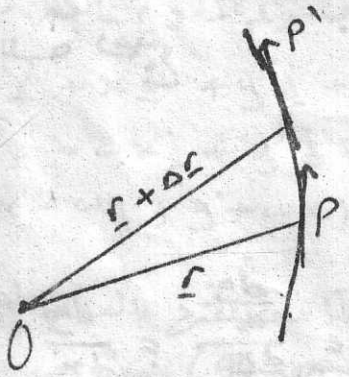


٢- السرعة

نفرض أنه P موضع النقطة المتحركة عند اللحظة t وانه P' موضع النقطة المتحركة عند اللحظة $t+\Delta t$ ونفرض انه O نقطة اصل ثابتة في المستوى وانه $(\vec{r}+\Delta\vec{r}, \vec{r})$ متجها الموضع للنقطتين P' و P بالنسبة الى O

التغير في الموضع =

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{PP'} = \Delta\vec{r}$$



والسرعة $\vec{V}$

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

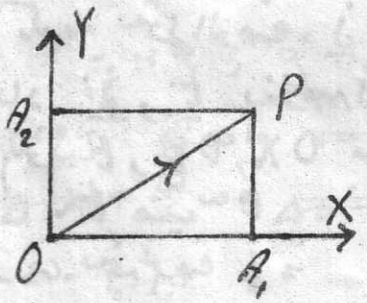
$$= \frac{d\vec{r}}{dt}$$

وتعمل في اتجاه المماس للمسار عند P

٣- مركبات السرعة للحركة المستوية

نفرض انه P موضع النقطة المتحركة عند اللحظة t وانه $\vec{r}$ متجه موضعها بالنسبة لنقطة الاصل الثابتة O

نفرض أنه OY و OX محوران متعامدان من مستوى الحركة عند O . نفرض انه $P \equiv (x, y)$ بالنسبة لهذين المحورين



$$\underline{r} = \underline{OP} = \underline{OA_1} + \underline{OA_2}$$

نفرض ان $\underline{i}$, $\underline{j}$ هما متجهي الوحدة (unit vectors) مقدار كل منهما يساوي الوحدة في اتجاهي المحورين OX, OY على الترتيب

$\underline{OA_1} = x\underline{i}$ وكذلك $OA_2 = y\underline{j}$

$$\therefore \underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j}$$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{x}\underline{i} + x\dot{\underline{i}} + \dot{y}\underline{j} + y\dot{\underline{j}}$$

يجب هنا اعتبار الحالتين الآتيتين :

الحالة الأولى:

اذا كانت المحاور ثابتة في هذه الحالة $\underline{i}$, $\underline{j}$ متجهي الوحدة يكونان ثابتين في المقدار وفي الاتجاه معا.

$\dot{\underline{i}} = 0$, $\dot{\underline{j}} = 0$ $\therefore$

وبذلك تصبح

$$\underline{v} = \dot{x}\underline{i} + \dot{y}\underline{j}$$

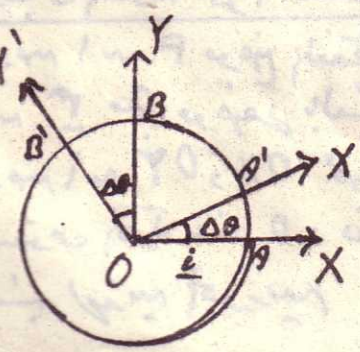
$$\underline{v} = (\dot{x}, \dot{y}) \quad , \quad \tan\theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}$$

وتمثل السرعة في اتجاه المماس للمسار عند P

الحالة الثانية:

اذا كانت المحاور متحركة - اي المحوران OX, OY يدوران حول O - في هذه الحالة يكون متجهي الوحدة $\underline{i}$ و $\underline{j}$ متغيران (في الاتجاه).

لايجاد $\dot{\underline{i}}$ و $\dot{\underline{j}}$ نفرض أن OX, OY موضع المحورين عند اللحظة t و OX', OY' موضع المحورين عند اللحظة $t + \Delta t$ حيث $X O X' = \Delta\theta$



التغير في متجه الوحدة $\underline{i}$ $= \Delta\underline{i} = \underline{OA'} - \underline{OA}$

$= \underline{AA'} = (1 \times \Delta\theta) \cdot \underline{j}$

$$\Delta\underline{i} = \Delta\theta\,\underline{j}$$

$$\dot{\underline{i}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{i}}{\Delta t} \quad \underline{i} = \theta \dot{\underline{j}}$$

$$\therefore \boxed{\dot{\underline{i}} = \dot{\theta}\underline{j}}$$

التغير في متجه الوحدة $\underline{j}$

$$\Delta \underline{j} = \underline{OB'} - \underline{OB} = \underline{BB'}$$
$$= (1 \times \Delta\theta)(-\underline{i})$$
$$\Delta \underline{j} = -\Delta\theta \underline{i}$$

$$\dot{\underline{j}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}(-\underline{i}) = -\dot{\theta}\underline{i}$$

$$\boxed{\dot{\underline{j}} = -\dot{\theta}\underline{i}}$$

حيث $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ السرعة الزاوية للمحورية حول θ فاذا كانت هذه السرعة الزاوية ثابتة ω فان

$$\dot{\underline{i}} = \omega \underline{j} \quad , \quad \dot{\underline{j}} = -\omega \underline{i}$$

وتكون مركبتا السرعة في حالة المحاور المتحركة بسرعة زاوية ثابتة ω هي

$$\underline{V} = \dot{x}\underline{i} + x\dot{\underline{i}} + \dot{y}\underline{j} + y\dot{\underline{j}}$$
$$= \dot{x}\underline{i} + \omega x \underline{j} + \dot{y}\underline{j} - \omega y \underline{i} = (\dot{x} - \omega y)\underline{i} + (\dot{y} + \omega x)\underline{j}$$
$$\therefore \underline{V} = (\dot{x} - \omega y, \dot{y} + \omega x) \qquad \underline{V}_{ab} = \underline{V}_{re} + (\underline{\omega} \times \underline{r})$$

مثال ١

given $\underline{V}$ get the Path & periodic time

تتحرك نقطة مادية في مستوى وكانت مركباتا سرعتها بالنسبة لمحوريين متعامدين في المستوى OX و OY على الترتيب $(\frac{4}{5}\omega y, \frac{4}{5}\omega x)$ حيث ω هي السرعة الزاوية للمحوريين حول O. اثبت ان مسار هذه النقطة هو قطع ناقص وأوجد الزمن الدوري لحركتها.

$$\underline{V} = (\dot{x} - \omega y, \dot{y} + \omega x)$$

$$\dot{x} - \omega y = \frac{4}{5}\omega y \Longrightarrow \quad \dot{x} = \frac{9}{5}\omega y$$

$$\dot{y} + \omega x = \frac{4}{5}\omega x \Longrightarrow \quad \dot{y} = -\frac{1}{5}\omega x$$

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = -9\frac{y}{x} \qquad \frac{dx}{dy} = -\frac{9y}{x}$$

$$\int x\,dx = -9\int y\,dy \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 = -\frac{9}{2}y^2 + c_1$$

$$x^2 + 9y^2 = c^2$$

$\frac{x^2}{c^2} + \frac{9y^2}{c^2} = 1$ وهذه معادلة قطع ناقص

لايجاد الزمن الدوري للحركة

$\ddot{x} = \frac{9}{5}\omega\dot{y} = \frac{9}{5}\omega(-\frac{1}{5}\omega x) = \frac{-9}{25}\omega^2 x$

$\ddot{y} = -\frac{9}{25}\omega^2 y$

وهذا يماثل حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري واحد وهو نفس الزمن الدوري للقطع الناقص

$\therefore T = 2\pi / \sqrt{\frac{9}{25}\omega^2} = \frac{10\pi}{3\omega}$

٤ - العجلة :

مركبات العجلة

أولاً : اذا كانت المحاور ثابتة

$\underline{v} = \dot{x}\,\underline{i} + \dot{y}\,\underline{j}$

$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \ddot{x}\,\underline{i} + \ddot{y}\,\underline{j}$

لأن $\underline{i}, \underline{j}$ ثابتان

$\therefore \underline{a} = (\ddot{x}, \ddot{y})$

ثانياً : اذا كانت المحاور متحركة :

نفرض أن المحاور OX, OY يدوران بسرعة زاوية ثابتة ω حول O

$\underline{v} = (\dot{x} - \omega y)\,\underline{i} + (\dot{y} + \omega x)\,\underline{j} \Rightarrow \frac{d\underline{r}_{ab}}{dt} = \frac{d\underline{r}_{re}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{r} \Rightarrow \underline{V}_{ab} = \underline{V}_{re} + \underline{\omega} \times \underline{r}$

$\underline{a} = (\ddot{x} - \omega\dot{y})\,\underline{i} + (\dot{x} - \omega y)\omega\,\underline{j} + (\ddot{y} + \omega\dot{x})\,\underline{j} + (\dot{y} + \omega x)(-\omega\,\underline{i})$

$= (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\,\underline{i} + (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\,\underline{j}$

$\left.\frac{d\square}{dt}\right|_{abs.} = \left.\frac{d\square}{dt}\right|_{rel.} + (\underline{\omega} \times \square)$

$a_1 = \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x$, $a_2 = \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y$

$\underline{a} = \underset{1}{\ddot{\underline{r}}_r} + \underset{2}{2(\underline{\omega} \times \dot{\underline{r}}_r)} - \underset{3}{\omega^2 \underline{r}}$

1 relative acceleration

2 Coriolis "

3 Centripental "

which must operate on $\underline{r}$ to get $\underline{V}$ or on $\underline{V}$ to get $\underline{a}$

مركبات السرعة والعجلة باستخدام الاحداثيات القطبية

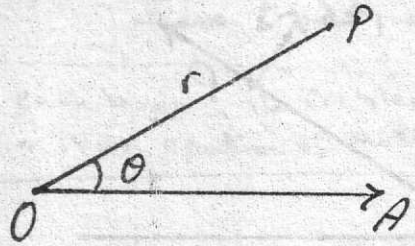
١- الاحداثيات القطبية Polar Coordinates

عندما تتحرك نقطة مادية في مستوى فإن موضع هذه النقطة يتعين تماماً اذا علم

(أ) بعد النقطة عن نقطة ثابتة في المستوى

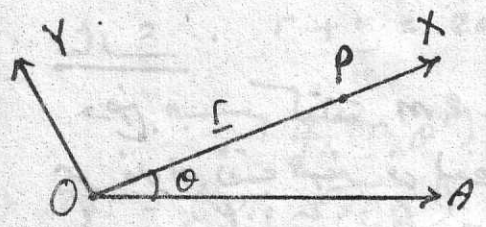
(ب) الزاوية التي يصنعها متجه الموضع مع اتجاه ثابت في المستوى مارا بالنقطة الأولى .

فمثلاً نفرض أن O نقطة ثابتة في المستوى ، P نقطة متحركة فيه . لتعيين موضع النقطة P عند أي لحظة يكفي أن نعلم طول OP ويرمز له عادة بالرمز r .



ثم نفرض انه OA أي اتجاه ثابت في المستوى وانه الزاوية $P\hat{O}A = \theta$
وبذلك يكون احداثيات النقطة P هي (r, θ) ويسمى هذا النوع من الاحداثيات بالاحداثيات القطبية وتسمى النقطة الثابتة O بالقطب Pole كما يسمى الاتجاه الثابت OA بالخط الابتدائي لقياس الزاوية θ [Initial Line
ويسمى $\overrightarrow{OP}$ بنصف القطر الجذب

٢- مركبتا السرعة



نعتبر نقطة مادية تتحرك حركة مستوية ولنفرض انه P موضع هذه النقطة عند اللحظة t.
باستخدام الاحداثيات القطبية نفرض انه $P = (r, \theta)$

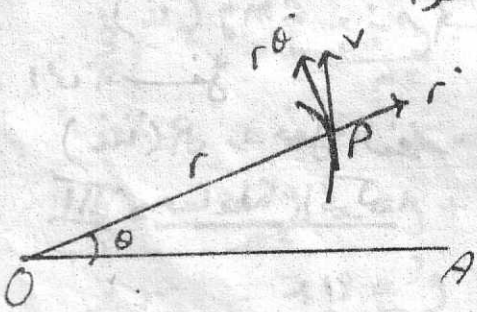
باختيار مجموعة المحاور المتحركة OX في اتجاه $\overrightarrow{OP}$ (اتجاه تزايد r)، OY عمودي عليه في نصف المستوى الذي يحتوي نصف القطر الجذب (حيث تزايد θ). واضح انه متجه الوضع $\underline{r} \equiv (r, 0)$ بالنسبة للمحاور المتحركة

$$\therefore \underline{r} = r\underline{i} + 0$$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{r}\underline{i} + r\dot{\underline{i}}$$

$$= \dot{r}\underline{i} + r\dot{\theta}\,\underline{j}$$

$$\boxed{\underline{v} = (\dot{r}, r\dot{\theta})}$$



تسمى المركبة الأولى $\dot{r}$ بالمركبة النصف قطرية للسرعة
Radial component of velocity
والمركبة الثانية بالمركبة المستعرضة
Transverse component of velocity

٣- مركبتا العجلة:

$$\underline{v} = \dot{r}\underline{i} + r\dot{\theta}\,\underline{j}$$

$$\underline{a} = \ddot{r}\underline{i} + \dot{r}\dot{\underline{i}} + (r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta})\underline{j} + r\dot{\theta}\dot{\underline{j}}$$

$$= \ddot{r}\underline{i} + \dot{r}\dot{\theta}\underline{j} + (r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta})\underline{j} - r\dot{\theta}^2\underline{i}$$

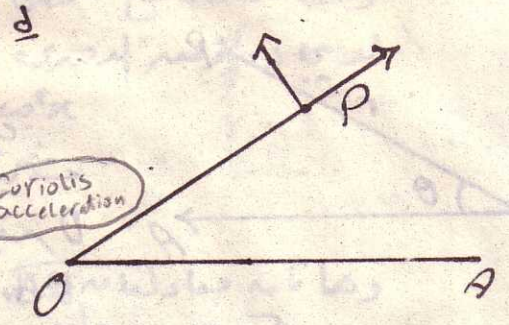
$$\underline{a} = (r'' - r\theta'^2)\underline{i} + (r\theta'' + 2r'\theta')\underline{j}$$

$$\underline{a} \equiv [(r'' - r\theta'^2), (r\theta'' + 2r'\theta')]$$

Coriolis acceleration

$$\underline{a} \equiv \left[(r'' - r\theta'^2), \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\theta')\right]$$

in the direction of increase of r and θ



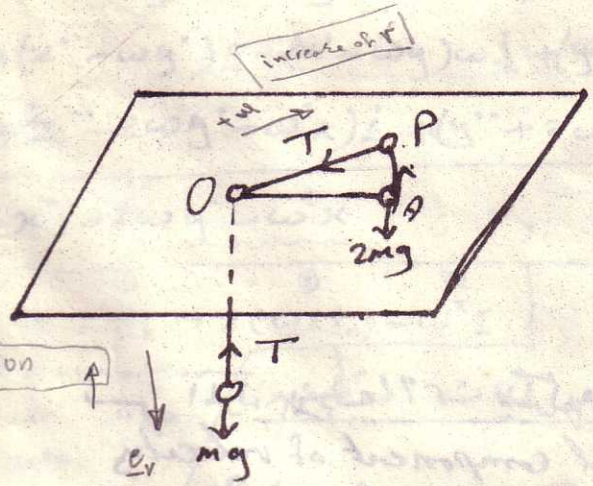
مثال ٢ :

2a

وضع جسم كتلته $2m$ على نضد افقي املس ويوصل بخيط مرن طوله $2a$ يمر خلال ثقب صغير في النضد ويحمل في طرفه الاخر جسيم كتلته m يتدلى رأسيا فاذا قذف الجسيم الاول على النضد بسرعة $\sqrt{3ag}$ في اتجاه عمودي على طول الخيط عندما كان على بعد a من الثقب . اثبت ان الجسيم الثاني يصل الى الثقب بسرعة مقدارها $\sqrt{\frac{5}{6}ag}$.

[1] أولا : حركة الجسيم على النضد

I تعيين الموقع



باستخدام الاحداثيات القطبية حيث الثقب O قطبا والاتجاه OA خطا ابتدائيا نفرض ان $P \equiv (r, \theta)$ موضع الجسيم عند اللحظة t

II القوى المؤثرة :

(i) T الشد في الخيط OP

(ii) $2mg$ وزن الجسيم رأسيا الى اسفل

(iii) R رد فعل النضد رأسيا الى أعلى

III معادلتا الحركة :

$\underline{a} = 2m(r'' - r\theta'^2)\underline{e}_r = -T\underline{e}_r$

in the direction of increase of (r)

$$2m(r'' - r\theta'^2) = -T \qquad (1)$$

$$\frac{2m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\theta') = 0 \qquad (2)$$

ثانيا : حركة الجسيم المعلق رأسيا [٥]

تعيين الوضع : نفرض أنه P' موضع الجسم الثاني عند اللحظة t حيث

$OP' = y$

For each body in the problem encountered there is an equation of motion

القوى المؤثرة :

(i) mg وزن الجسيم رأسيا الى أسفل

(ii) T الشد في الخيط رأسيا الى أعلى

معادلة الحركة

LOOK

this equation is taken in the direction of the force (mg) $\hat{e}_v$

i.e $(mg - T)\hat{e}_v = m\ddot{y}\hat{e}_v$

$$m\ddot{y} = mg - T \qquad (3)$$

هذه المعادلات الثلاث غير كافية لتعيين المجاهيل الأربع r, θ, T, y.

العلاقة البرابط هي

$\ddot{r} + \ddot{y} = 0 \Rightarrow \ddot{y} = -\ddot{r}$

$$r + y = 2a \qquad (4)$$

من (2) نجد أن

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad \therefore r^2\dot{\theta} = \text{const.}$$

وكلما عند بدء الحركة كانت $r = a$ و $\underline{v} = (\dot{r}, r\dot{\theta}) = (0, \sqrt{3ag})$

Initial Conditions

$$\therefore r \times r\dot{\theta} = a \times \sqrt{3ag} = \text{const.} \quad \text{(By initial conditions)}$$

1st Problem

$$r^2\dot{\theta} = a\sqrt{3ag}$$

$r(r\dot{\theta}) = a\sqrt{3ag} \Rightarrow r\dot{\theta} = a\sqrt{3ag}/r$

when $r = 2a \Rightarrow$

$r\dot{\theta} = \sqrt{3ag}/2$

3rd Problem

$(r^2\dot{\theta})^2 = 3a^3g = r^4\dot{\theta}^2 =$

$r^3(r\dot{\theta}^2) \Rightarrow r\dot{\theta}^2 = \frac{3a^3g}{r^3}$

نجد أن T من المعادلتين (1) ، (3) نجد أن

$$2m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = m\ddot{y} - mg$$

$y = 2a - r \Rightarrow$

$\dot{y} = -\dot{r}$

$\ddot{y} = -\ddot{r}$

2nd Problem

$$2(\ddot{r} - \frac{ra^2 \times 3ag}{r^4}) = -\ddot{r} - g$$

4th Problem

$d^2r/dt^2 =$

$\frac{d(dr/dt)}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} =$

$\dot{r}\cdot\frac{d\dot{r}}{dr}$

$$2\ddot{r} - \frac{6a^3g}{r^3} = -\ddot{r} - g$$

$$3\ddot{r} = \frac{6a^3g}{r^3} - g$$

بالتكامل بالنسبة r

$$\frac{3}{2}\dot{r}^2 = -\frac{1}{2}\frac{6a^3g}{r^2} - gr + \text{Const}$$

5th Problem

$\dot{r} = 0$ at $r = a$ (By initial Conditions)

$$0 = -\frac{3a^3g}{a^2} - ag + \text{Const} \Longrightarrow \text{Const} = 4ag$$

$$\frac{3}{2}\dot{r}^2 = -\frac{3a^3g}{r^2} - gr + 4ag$$

(By boundary Conditions) $r = 2a$ نضع

أي $y = 0$

$$\frac{3}{2}\dot{r}^2 = \frac{-3a^3g}{4a^2} - 2ag + 4ag = \frac{5}{4}ag$$

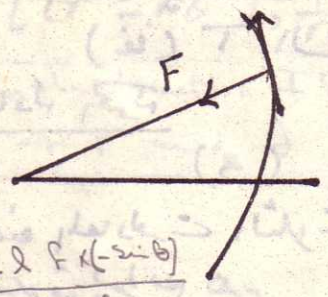
$$\dot{r}^2 = \frac{5}{6}ag \quad \therefore \dot{r} = \sqrt{\frac{5}{6}ag}$$

notice the radial velocity of the body on the table is equivalent to the velocity of the vertically moving body $= \dot{r}$

equation of path

مثال ٣

تتحرك نقطة مادية من المختبر $r = l/(1+f\cos\theta)$ تحت تأثير قوة تعمل دائما في اتجاه القطب. اثبت ان هذه القوة تتناسب عكسيا مع مربع البعد عن القطب



معادلتا الحركة

$$F = -m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (1)$$

$$0 = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (2)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

$$\therefore r^2\dot{\theta} = \text{Const} = a \Longrightarrow \dot{\theta} = \frac{a}{r^2}$$

$$r = \frac{l}{1+f\cos\theta}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{0 - l f \times(-\sin\theta)}{(1+f\cos\theta)^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot{r} = -l(1+f\cos\theta)^{-2} \times -f\sin\theta\,\dot{\theta}$$

$$\therefore \dot{r} = \frac{lf\sin\theta\,\dot{\theta}}{(1+f\cos\theta)^2} = \frac{lf\sin\theta}{l^2} \times \frac{a}{r^2}$$

$$1/(1+f\cos\theta)^2 = (r/l)^2$$

$$\therefore \dot{r} = \frac{af\sin\theta}{l}$$

$$\ddot{r} = \frac{af\cos\theta\,\dot{\theta}}{l} = \frac{af\cos\theta}{l} \times \frac{a}{r^2} = \frac{a^2 f}{lr^2}\cos\theta$$

$$F = -m\left(\frac{a^2 f\cos\theta}{lr^2} - r\cdot\frac{a^2}{r^4}\right) = -\frac{ma^2}{r^2}\left(\frac{f\cos\theta}{l} - \frac{1}{r}\right)$$

Go To Page (6) above

$$= -\frac{ma^2}{r^2}\left(\frac{f\cos\theta}{l} - \frac{1+f\cos\theta}{l}\right) = \frac{ma^2}{l}\cdot\frac{1}{r^2} \qquad \therefore F \propto \frac{1}{r^2}$$

[B]

الحركة في دائرة:

١- مركبتا السرعة والعجلة لنقطة تتحرك في دائرة

عندما تتحرك نقطة مادية في دائرة في هذه الحالة تكون $r = \text{const.}$ وهو نصف قطر الدائرة وعلى ذلك فان مركبتي السرعة

$$\underline{v} \equiv (0, r\dot{\theta})$$

ومركبتا العجلة

$$\underline{a} \equiv (-r\dot{\theta}^2, r\ddot{\theta})$$

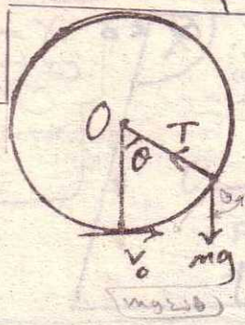
① **الحركة الحادثة في دائرة رأسية:**

علق جسيم كتلته m في نقطة ثابتة O بواسطة خيط خفيف طوله l فاذا قذف الجسيم من اسفل موضع بسرعة افقية V_0 ادرس الحركة

notice, in this case, the particle isn't moving on a circular track or ring or anything.

Someone holding in his hand a rope with a particle fixed in the other end whit, he gives a push to the particle s.t the time of the push $t=0$. $2s$ giving (2) to the particle which moves in a circular arc. Now for the particle may continue in a circular arc to describe a circle, or not. $\theta < \pi$ the rope becomes tension less within its material, hence the particle behaves like a projectile at $\theta < \pi$ and $T=0$. Notice if at $\theta=\pi$ and $T=0$ the particle continues to describe a circular path

معادلتا الحركة



$$m(-l\dot{\theta}^2) = mg\cos\theta - T$$ radial equation

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$ transverse equation

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \qquad \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{l}\cos\theta + c$$

by initial conditions

وكذلك

$$V_0 = l\dot{\theta} \quad \text{حيث} \quad \theta = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{V_0^2}{l^2} = \frac{g}{l} + c_1 \implies c_1 = \frac{V_0^2}{2l^2} - \frac{g}{l}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{l}(\cos\theta - 1) + \frac{V_0^2}{2l^2}$$

فاذا كانت سرعة الجسيم عند اى لحظة تساوى V

$$V^2 = l^2\dot{\theta}^2$$

$$= 2lg(\cos\theta - 1) + V_0^2 \qquad m(V^2/l) = m(l\dot{\theta}^2)$$

$$\therefore T = mg\cos\theta + m(l\dot{\theta}^2) = mg\cos\theta + 2mg(\cos\theta - 1) + \frac{mV_0^2}{l}$$

$$= mg(3\cos\theta - 2) + \frac{mV_0^2}{l}$$

الشرط اللازم لحدوث دورات كاملة

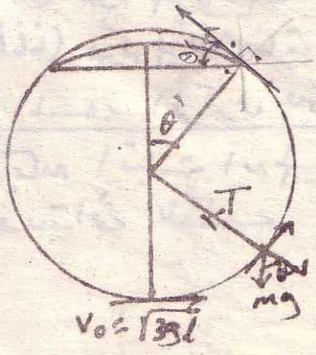
لكى تستمر الحركة فى دائرة كاملة يجب ان يكون $T \geq 0$ عندما يصل الجسيم اعلى نقطة فى الدائرة. اى $\theta = \pi$

$$mg(-3-2) + \frac{mV_0^2}{l} \geq 0$$

$$5gl \leq V_0^2 \implies V_0 > \sqrt{5gl}$$

مثال

قذفت نقطة مادية تتصل بخيط طوله l وعلقت هذه الاخيرة من نقطة ثابتة بسرعة قدرها $\sqrt{3gl}$ فى الاتجاه الافقى عندما كان الخيط رأسيا. اوجد الزاوية التى ينعدم عندها الشد واقصى ارتفاع يصل اليه المقذوف.



معادلتا الحركة

$$ml\dot{\theta}^2 = T - mg\cos\theta$$

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{l}\cos\theta + c_1$$

$\theta' = \frac{v_0}{l} = \frac{\sqrt{3gl}}{l}$ عندما $\theta = 0$

$\frac{1}{2}(\theta'^2 - \frac{3g}{l}) = \frac{g}{l}(\cos\theta - 1)$

$\theta'^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - 1) + \frac{3g}{l}$

$\therefore T = mg\cos\theta + m[2g(\cos\theta - 1) + 3g]$

$= mg(3\cos\theta + 1)$

$T = 0$ عندما $\cos\theta = -\frac{1}{3}$, $\cos\theta' = \frac{1}{3}$

$\cos\theta' = \cos(180 - \theta) = -\cos\theta$

$\therefore \theta'^2 = \frac{2g}{l}(-\frac{1}{3} - 1) + \frac{3g}{l} = \frac{g}{3l}$

$\therefore v = l\theta' = l\sqrt{\frac{g}{3l}} = \sqrt{\frac{gl}{3}}$

أقصى ارتفاع يصل اليه المقذوف

$$l + l\cos\theta' + \frac{v_0^2 \sin^2\theta'}{2g} = \frac{40}{27}l$$

the highest point a projectile reaches is

$y = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \Rightarrow$

$E_p = E_k \quad mgy = \frac{1}{2}m(v_0\sin\alpha)^2$

$v_0\sin\alpha$

$v_0\cos\alpha$

the particle is pushed with a speed v_0 in a direction making angle α with the horizontal at the point of v_0

$\Rightarrow$ here $v_0 = \sqrt{9gl/3}$

which is the point at which the particle behaves like a projectile

Now, motion in a circle is mentioned, we knew that motion is set up by a single push to the particle. Our new situation is a force always acting on a particle i.e. a particle in a force field and the curve is not a circle in general when we discuss central force fields.

The Locus of a moving particle in the field of a central force

≡ Central Orbits

المدارات المركزية :

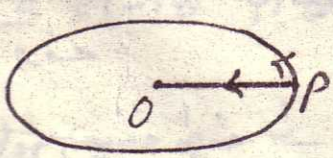
١- تعريف

المدار المركزي هو المنحنى الذي ترسم نقطة مادية تتحرك تحت تأثير قوة مركزية جاذبة (أو طاردة) نحو مركز ثابت . مثال ذلك

(i) حركة الذرة وجميع الكواكب السيارة حول الشمس

(ii) حركة الأقمار الصناعية حول الأرض

(iii) حركة الإلكترونات حول النواة



٢- المدار المركزي منحنى مستو :

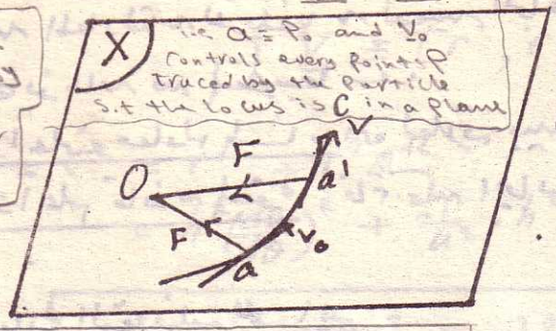
The Curve C lie in a plane

يمكن اثبات ان المدار المركزي يقع بأكمله في مستو واحد هو المستوى الابتدائي للقذف

$F \underset{\text{needed}}{\overset{\text{needed}}{\rightleftharpoons}} C$

To sum, $\forall$ Points on the curve C which lie in a Plane, because F is in the direction of $\overrightarrow{PO}$. i.e all Points P behave simply like $P_0 \equiv a$ Σ has direction $\underline{PO} - \underline{aO} \Rightarrow$

the Plane X is determined by this Point O and the vector $\underline{V}_0$



The Plane X is determined by V_0 and $\underline{F} = \underline{a}|_{r_0}$

$\Rightarrow \underline{F}\,dt + \underline{V}_0 = \underline{V}' = (F_r\,dt + V_{r_0})\,\underline{e}_r + V_{\theta_0}\,\underline{e}_\theta$

$\underline{a} = \frac{d\underline{V}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{V}' - \underline{V}_0}{\Delta t}$, $\underline{V}_0 = V_{r_0}\,\underline{e}_r + V_{\theta_0}\,\underline{e}_\theta$, $\underline{F} = \underline{a} = F_r\,\underline{e}_r \Rightarrow$

(1) نفرض انه O مركز الجذب و انه المقذوف قذف من الموضع a بسرعه البدائيه V_0. المستوى الذى يحتويه مركز الجذب O و السرعه الابتدائيه V_0 يسمى المستوى الابتدائى للقذف. ونفرض انه المستوى X.

(2) بما انه المستوى يحتوى الموتر على المقطع المتجه $\overrightarrow{aO}$ تقع فى المستوى X. اذن العجله الناتجه عنه تقع ايضا فى نفس المستوى اى انها تقع فى المستوى X وعلى ذلك فالسرعه التى تكتسبها المقذوف تكون ايضا داخل المستوى X. كذلك عند الموضع a' تكون

(3) العجله الناتجه عن قوة الجذب تقع فى المستوى X وعلى ذلك فالسرعه الجديده تقع ايضا فى المستوى X وهكذا. اى ان المقطع المتحرك تستمر فى الحركه داخل المستوى X

$\overrightarrow{PO}$

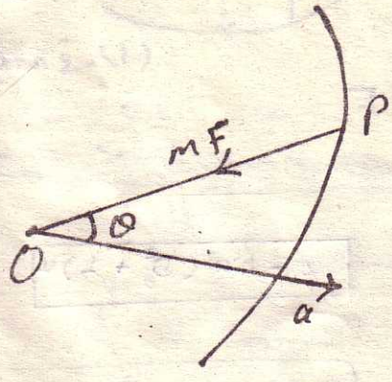
٢- دراسه الحركه:

اعتبر مقطع مادى كتلته m يتحرك تحت تأثير قوة مركزية جاذبه مقدارها F نحو مركز جذب ثابت O. اوجد حركه هذا المقطع

لوحة التل

أ- تعيين الموضع

نفرض انه P موضع المقطع المتحرك عند اللحظه t باختيار مركز الجذب O قطبا و الاتجاه $\overrightarrow{Oa}$ خطا ابتدائيا.



نفرض انه $P \equiv (r, \theta)$

مركبتا السرعه فى هذه الحاله

$\underline{v} \equiv (\dot{r}, r\dot{\theta})$

و مركبتا العجله

$\underline{a} \equiv [(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2), \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})]$

ب- القوى المؤثره:

$\overrightarrow{PO}$ mF قوة الجذب فى اتجاه

ج- معادلتا الحركه:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\underline{e}_r = -mF\,\underline{e}_r \quad (1)$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

$$r^2\dot{\theta} = \text{const.} = h \quad (2)$$

هذه المعادلة لا يكفي لتعيين المجاهيل الثلاث r, θ, F ولذلك هناك نوعان من التطبيقات.

1. إذا علمت معادلة المسار أي العلاقة بين (r,θ) فإنه يمكن إيجاد قانون القوة
2. إذا علم قانون القوة فإنه يمكن إيجاد معادلة المسار

٤ - المعادلة التفاضلية للمسار:

من الواضح أن معادلتا الحركة (1), (2) تتضمنان الزمن t (لماذا؟) فمن المباشر) ولحذف الزمن بينهما فإننا نستخدم التغير

$$u = \frac{1}{r} \Longrightarrow r = \frac{1}{u}$$

$$\frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2}$$

(i) $$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} = hu^2$$

(ii) $$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \cdot \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta} \cdot hu^2 = -h\frac{du}{d\theta}$$

(iii) $$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = -h\frac{d^2u}{d\theta^2} \cdot hu^2 = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

Substituting in (1):

بالتعويض في (1)

$$\therefore -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u} \cdot h^2u^4 = -F$$

$$u^2h^2\left\{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right\} = F$$

$$F = h^2u^2\left(D_\theta^2 + 1\right)u$$

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{u^2h^2}}$$

$$F = h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية للمسار المركزي

which for a force $\underline{F}$ directed away from the Pole

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{F}{u^2h^2}}$$

٥- قانون لبرت :

سرعة النقطة

$$\underline{V} \equiv (\dot{r}, r\dot{\theta})$$

ولذلك فإن مقدار السرعة يعطى بـ

$$\|\underline{V}\|^2 = v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

From the Pythagorean theorem

$$= h^2\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{u^2}\cdot h^2 u^4$$

$$\boxed{v^2 = h^2\left\{\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right\}}$$

[1] تطبيقات على النوع الأول

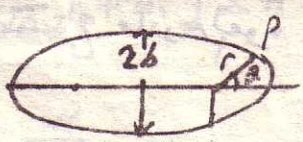
given $C \Rightarrow F$

إذا علمت معادلة المسار فإنه يمكنه إيجاد قانون القوة

مثال ١

تتحرك نقطة مادية في قطع ناقص تحت تأثير قوة جاذبة مركزية نحو إحدى بؤرتيه. أثبت أن القوة المركزية المؤثرة عليه تتناسب عكسياً مع مربع البعد عن هذه البؤرة ثم أوجد سرعة النقطة عند أي موضع.

معادلة القطع الناقص في الإحداثيات القطبية باعتبار البؤرة قطباً



$$r = \frac{L}{1 + e\cos\theta}$$

حيث $2L$ طول الوتر البؤري العمودي

L = semi-latus rectum

e الاختلاف المركزي

eccentricity

القطاعات المخروطية

- قطع زائد $e > 1$ — hyperbola
- قطع ناقص $e < 1$ — ellipse
- قطع مكافئ $e = 1$ — parabola

$$\therefore u = \frac{1}{L}(1 + e\cos\theta)$$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{-e}{L}\sin\theta \quad , \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{-e}{L}\cos\theta$$

$$F = u^2h^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = u^2h^2\left[-\frac{e}{L}\cos\theta + \frac{1}{L} + \frac{e}{L}\cos\theta\right] = \frac{u^2h^2}{L}$$

حيث $\mu = \frac{h^2}{L}$ اى ان $h = \sqrt{\mu L}$

$$\therefore F = \frac{h^2}{L} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{\mu}{r^2} \Longrightarrow F \propto \frac{1}{r^2}$$

أى ان القوة تتناسب عكسيا مع مربع البعد عن البؤرة

لايجاد السرعة

$$v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right]$$

$$= h^2\left[\frac{e^2}{L^2}\sin^2\theta + \frac{1}{L^2} + \frac{e^2}{L^2}\cos^2\theta + \frac{2e}{L^2}\cos\theta\right]$$

$$= \frac{h^2}{L}\left[2u - \frac{1-e^2}{L}\right]$$

$$= \frac{h^2}{L}\left[2u - \frac{1}{a}\right] = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}$$

$$\left[\frac{e^2}{L^2} + \frac{1}{L^2} + \frac{2e\cos\theta}{L^2} + \frac{1}{L^2} - \frac{1}{L^2}\right] = h^2\left[\frac{2}{L}\cdot\frac{(1+e\cos\theta)}{L} - \frac{1}{L}\cdot\frac{1-e^2}{L^2}\right] =$$

$$= \frac{h^2}{L}(2u - \gamma a) \quad , \mu = h^2/L$$

For an ellipse

$b^2 = a^2(1-e^2)$; $L = \frac{b^2}{a}$

$= \frac{b^2}{a \cdot a} \times (1-e^2) = \frac{L}{a}$

$\Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1-e^2}{L}$

ويمكن استنتاج قانون القوة والسرعة فى حالتى القطع الزائد والقطع المكافئ

سؤال :

اثبت ان قانون القوة عندما يكون المسار قطع مكافئ أو زائد هو ايضا قانون التربيع العكسى وان قانون السرعة هو :

فى حالة القطع المكافئ $v^2 = \frac{2\mu}{r}$ $e=1$ Prabola

فى حالة القطع الزائد $v^2 = \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a}$ $b^2 = a^2(e^2-1)$

semi-Latus rectum $L = b^2/a$; hyperbola

ملاحظة :

فى حالة القطع الناقص $v^2 < \frac{2\mu}{r}$ ellipse

فى حالة القطع المكافئ $v^2 = \frac{2\mu}{r}$ Prabola

فى حالة القطع الزائد $v^2 > \frac{2\mu}{r}$ hyperbola

مثال ٢

تتحرك نقطة مادية في مستوى تحت تأثير قوة مركزية جاذبة . اوجد قانون القوة وكذلك مقدار السرعة اذا كانت المسار هو المنحنى $r = ae^{\theta}$.

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{a} e^{\theta} \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{1}{a} e^{-\theta}$$

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{a} e^{-\theta} \quad , \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{a} e^{-\theta}$$

من قانون القوة

$$F = u^2 h^2 \left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right]$$

$$= \frac{1}{a^2} e^{-2\theta} h^2 \left[\frac{1}{a} e^{-\theta} + \frac{1}{a} e^{-\theta}\right] = \frac{2h^2}{a^3} e^{-3\theta} = 2h^2 u^3 = \frac{2h^2}{r^3}$$

$$\therefore F \propto \frac{1}{r^3}$$

لايجاد السرعة

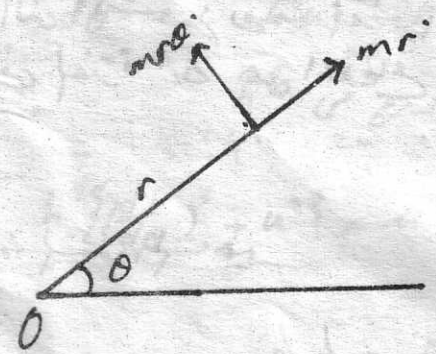
$$v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = h^2\left[\frac{e^{-2\theta}}{a^2} + \frac{e^{-2\theta}}{a^2}\right] = \frac{2h^2}{a^2} e^{-2\theta}$$

$$\therefore v^2 = \frac{2u}{r^2}$$

the Physical meaning for the Constant (h) :-

٦- المعنى الفيزيقي للثابت h :

(i) h هي كمية الحركة الزاوية لوحدة الكتل



لقد وجدنا من المعادلة (2) أن

$$r^2\dot{\theta} = \text{Const.} = h$$

$$\therefore h = r^2\dot{\theta} = r \times r\dot{\theta}$$

مركبتا السرعة في الاحداثيات القطبية هي

$$\underline{v} \equiv (\dot{r}, r\dot{\theta})$$

$m\underline{v}$ = Linear momentum = كمية الحركة الخطية

$$(m\dot{r}, mr\dot{\theta})$$

$\underline{e}_r$	$\underline{e}_\theta$	$\underline{k}$	$-2r^2\dot{\theta}\,\underline{k}$
$\dot{r}$	$r\dot{\theta}$	0	
r	0	z	

moment of momentum — angular momentum

كمية الحركة الزاوية للنقطة حول O = عزم كمية الحركة حول O $= 0$

$$0 + mr\dot{\theta}\,x\,r = mr^2\dot{\theta}$$

وكذلك $h = r^2\dot{\theta}$ = كمية الحركة الزاوية لوحدة الكتل

$\underline{r} \times m\dot{\underline{r}} = \underline{h}$ moment of momentum
$= \underline{r} \times m\underline{v}$

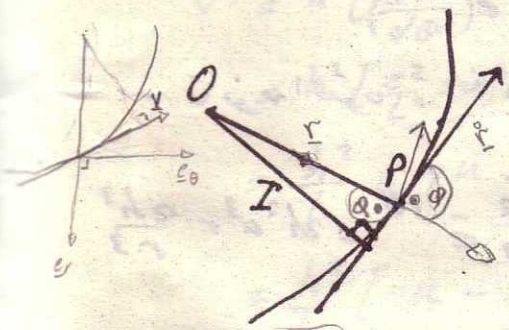
$\therefore h$ هي كمية الحركة الزاوية لوحدة الكتل

ولذلك يمكن ايجاد h بطريق اخرى

نفرض أن P هو الوضع الابتدائي للحركة وأن الجسيم قد قذف بسرعة ابتدائية v_0 وعلى ذلك فإن كمية الحركة الزاوية عند بدء الحركة هي

$$mv_0 I$$

حيث I هو طول العمود الساقط من القطب O على المماس للمسار الحركي



$$\therefore h = v_0 I_0$$

$$\therefore h = vI = v'I' = \text{-----} = v_0 I_0$$

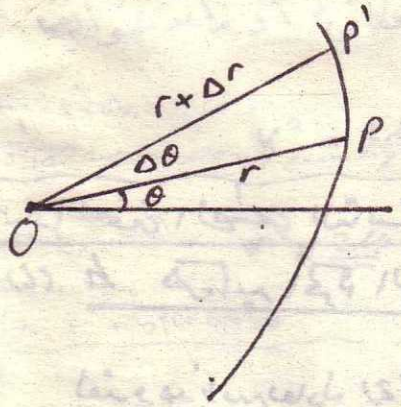
$I = r\sin\varphi$ ⇒ $V_0 \sin\varphi \times r$ ⇒ $V_0 I_0$

h is twice the areal velocity

(ثانياً) h هي ضعف السرعة الساحية:

تعريف:

السرعة الساحية هي المعدل الذي يكتسح به نصف القطر المتجه الساقط من مستوى الحركة بالنسبة للزمن



نفرض أن $P \equiv (r,\theta)$ موضع النقطة المتحركة عند اللحظة t وأن $P' \equiv (r+\Delta r, \theta+\Delta\theta)$ موضعها عند اللحظة $t+\Delta t$ فتكون السرعة الساحية التي اكتسحها نصف القطر المتجه $\overline{OP}$ في الفترة Δt هي القطاع OPP' ومساحته

$$\tfrac{1}{2} r\,\Delta\theta \times r$$

∴ السرعة الساحية

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2}r^2\Delta\theta}{\Delta t} = \tfrac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \tfrac{1}{2}h$$

$\frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \dot{A}$ = areal velocity
$\Rightarrow 2\dot{A} = r^2\dot{\theta} = h$
$2dA = h\,dt \Rightarrow 2\frac{dA}{dt}$

$\therefore h = 2 \times$ السرعة الساحية

Areal Velocity: Suppose a point to move on a plane. The rate at which a radius vector to the point sweeps out area is called areal velocity. When a particle is acted upon by a force directed along the radius, angular momentum is conserved and the areal velocity is constant.

$2\,dA = h\,dt \Rightarrow dt = 2\,\frac{dA}{h} = \frac{dA}{(h/2)} \Rightarrow t = \frac{A}{(h/2)}$

area swept out $\propto$ time elapsed

نتيجة ١

عندما تتحرك نقطة مادية في مسار مركزي فإن سرعة المساحية تكون ثابتة وتساوي $\frac{1}{2}h$ أي أن المساحة التي يكتسحها نصف القطر المتجه تتناسب مع الزمن الذي استغرق حيث

$\frac{1}{2}h$ = areal velocity = $\frac{\text{area swept out}}{\text{time lasted}}$ = Const.

time lasted = area swept out / areal velocity

نتيجة ٢

إذا كانت المساحة بالنسبة لمركز القوة في المسار الذي ترسم فيه النقطة هذا المسار.

$$T = \frac{\text{المساحة المحددة بالمسار}}{\text{السرعة المساحية}}$$

فمثلاً إذا كان المسار قطع ناقص

$$T = \frac{\text{مساحة القطع}}{\frac{1}{2}h} = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}h}$$

Notice $d^2u/d\theta^2 = \frac{d(du/d\theta)}{du}\cdot\frac{du}{d\theta}$; now take $(du/d\theta) = u'$ $\Rightarrow$

$u'\,\frac{du'}{du} = \frac{d^2u}{d\theta^2}$

[2] تطبيقات على النوع الثاني

given $F \overset{\text{wanted}}{\Longrightarrow} r$

F = a directed towards the pole

إذا علم قانون القوة المطلوب إيجاد معادلة المسار

مثال ٣

إذا علم أن الجسم يتحرك في مسار مركزي هي $a = \mu u^3(3+2a^2u^2)$ (1) وأن البعد المادي قد قطع بعد $r = a$ (2) بالسرعة $\sqrt{5\mu}/a^2$ (3) في اتجاه يصنع زاوية $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ مع الخط الابتدائي. اثبت أن معادلة المسار هي $r = a\tan(\theta + \frac{\pi}{4})$

$F = a$ = force per unit mass

المعادلة التفاضلية للمسار هي

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2u^2} = \frac{a}{h^2u^2} = \frac{\mu u^3(3+2a^2u^2)}{h^2u^3} = \frac{\mu}{h^2}(3u + 2a^2u^3)$$

$\int u'\,du' = \int\left[\frac{\mu}{h^2}(3u+2a^2u^3) - u\right]du \Rightarrow$

بضرب هذه المعادلة بالنسبة الى المتغير u ثم نضرب في h^2

$\frac{1}{2}u'^2 = \left[\frac{\mu}{h^2}\left(\frac{3}{2}u^2 + \frac{2a^2}{4}u^4\right) - \frac{1}{2}u^2\right] + C_1 \Rightarrow \frac{1}{2}(u'^2 + u^2) = \frac{\mu}{h^2}\left(\frac{3}{2}u^2 + \frac{2a^2}{4}u^4\right) + C_1$

$$h^2\left\{\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right\} = \mu\{3u^2 + a^2u^4\} + C_1$$

لتعيين C_1 والثابت h نعلم أن

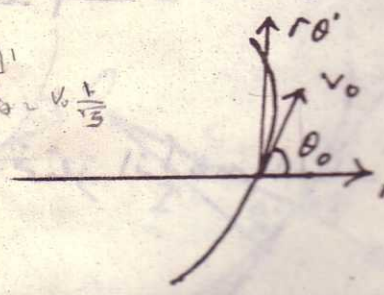
$$\{v^2 = h^2\left\{\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right\}$$

it is required in the problem to show that $r = a\tan(\theta+\pi/4)$ i.e as (θ) increases So is (r) - So we want to determine the sign of $(du/d\theta)$ ⇒ either from above ① or from the fact that we are to find (u) and $u = 1/r$ ⇒ according to what is required from us ⇒ (u) is a cotan function and according to this condition we choose the sign to be $(-ve)$ ②

عند بدء الحركة $r = a$ عندما $v = v_0 = \sqrt{\frac{5\mu}{a^2}}$

$$\frac{5\mu}{a^2} = \mu\left[\frac{3}{a^2} + \frac{1}{a^2}\right] + C_1 \Longrightarrow C_1 = \frac{\mu}{a^2}$$

ولإيجاد قيمة h نعلم أن النقطة المادية قذفت بسرعة ابتدائية قدرها $\sqrt{\frac{5\mu}{a^2}}$ في اتجاه يصنع زاوية θ_0 حيث $\tan\theta_0 = \frac{1}{2}$



$$h = r^2\dot\theta = r \times r\dot\theta$$
$$= a\cdot\sqrt{\frac{5\mu}{a^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt5} = \sqrt{\mu}$$

∴ بالتعويض في المعادلة

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = 3u^2 + a^2u^4 + \frac{1}{a^2}$$

as (r) increases (θ) " (u) decreases

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = 2u^2 + a^2u^4 + \frac{1}{a^2} \Rightarrow a^2\left(u^4 + 2\frac{u^2}{a^2} + \frac{1}{a^4}\right) = a^2\left(u^2 + 1/a^2\right)^2$$

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{2u^2 + a^2u^4 + \frac{1}{a^2}}$$

بتكامل المعادلة نجد أنه

$$\theta + C_2 = -\int \frac{du}{\sqrt{2u^2 + a^2u^4 + \frac{1}{a^2}}} = \int \frac{-du}{au^2 + \frac{1}{a}}$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{du}{u^2 + \frac{1}{a^2}} = \cot^{-1} au$$

$\cot^{-1}x = y$ $\quad \cos^2y + \sin^2y = 1$

$x = \cot y \Rightarrow 1 \Rightarrow$

$(-1/\sin^2y)\frac{dy}{dx} = 1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1/(-1/\sin^2y) = -(1/1+x^2)$

عند بدء الحركة

$u = \frac{1}{a}$, $\theta = 0 \Longrightarrow C_2 = \cot^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$

$$au = \cot(\theta + \tfrac{\pi}{4}) \qquad \frac{a}{r} = \cot(\theta + \tfrac{\pi}{4})$$

$$\therefore r = a\tan(\theta + \tfrac{\pi}{4})$$

as θ increases ⇒ r increases ⇒ u decreases ⇒ $du/d\theta = -ve$

مثال ٤

تتحرك نقطة مادية تحت تأثير القوة المركزية الجاذبة $F = \mu u^3$ لوحدة الكتل حيث μ ثابتة فإذا قذفت النقطة المادية من موضع على بعد a من مركز الجذب بسرعة $\sqrt{\frac{\mu}{a^2}}$ في اتجاه يميل بزاوية $\frac{\pi}{4}$ على نصف القطر المتجه.

أثبت أن معادلة المسار هي $r = ae^{\theta}$ وأن المسافة التي تأخذها حتى تكون على بعد r من المركز هو $\frac{r^2 - a^2}{\sqrt{2\mu}}$.

$\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right]h^2u^2 = F = \mu u^3$

المعادلة التفاضلية للمدار هي

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u = \frac{F}{h^2u^2} = \frac{\mu u^3}{h^2u^2} = \frac{\mu u}{h^2}$$

$$h^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right] = \mu u$$

$h^2\left[u\frac{du}{du}+u\right] = \mu u$

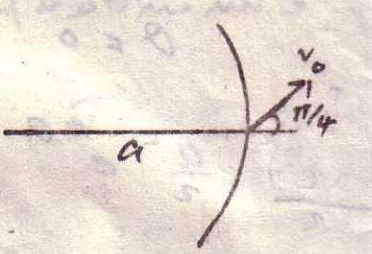
بالتكامل بالنسبة إلى u

$$h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right] = \mu u^2 + C_1$$

لايجاد C_1 و h نستخدم الشروط الابتدائية $v = \sqrt{\frac{\mu}{a^2}}$ حيث $r = a$

$$v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right] = \frac{\mu}{a^2} = \frac{\mu}{a^2}+C_1 \Longrightarrow C_1 = 0$$

$$h = r^2\dot{\theta} = r\cdot r\dot{\theta} = a\cdot v_0 \sin\frac{\pi}{4}$$
$$= a\cdot\sqrt{\frac{\mu}{a^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\mu}{2}}$$



$$\therefore \frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right] = \mu u^2$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = u^2$$

$$\frac{du}{d\theta} = \pm u$$

$u = 1/r$

اختيار الإشارة:

١- اذا كانت u تزداد مع θ عند بدء الحركة فإن $\frac{du}{d\theta} = +$

٢- " " u تتناقص مع θ " " $\frac{du}{d\theta} = -$

في هذه الحالة u تقل مع θ

$$\frac{du}{d\theta} = -u \qquad \frac{du}{u} = -d\theta \qquad \ln u = -\theta + C_2$$

$$u = \frac{1}{a} \text{ at } \theta = 0 \Longrightarrow C_2 = \ln\frac{1}{a}$$

$$\ln u = -\theta + \ln\frac{1}{a}$$

$$\ln u + \ln a = -\theta \Longrightarrow \ln ua = -\theta \Longrightarrow au = e^{-\theta}$$

$$\therefore r = ae^{\theta}$$

$e^y = x \Rightarrow \ln x = y$

$e^{\ln x} = x \Rightarrow$ here

$x = au \Rightarrow e^{-\theta} = e^{\ln ua} = ua$

لإيجاد الزمن الذي تأخذه النقطة المادية حتى تكون على بعد r من المركز

$$h = r^2\dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mu}{2}}$$

$$* \quad \boxed{r^2\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{2}}}$$

$$a^2 e^{2\theta}\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{2}}$$

$$\int a^2 e^{2\theta}\, d\theta = \int \sqrt{\frac{\mu}{2}}\, dt$$

$$\frac{a^2}{2} e^{2\theta} = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\, t + c$$

$$\theta = 0 \quad at \quad t = 0 \implies c = \frac{a^2}{2}$$

$r = ae^{\theta}$

$$\frac{(ae^{\theta})^2}{2} \quad \frac{a^2}{2} e^{2\theta} = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\, t + \frac{a^2}{2}$$

$$\frac{r^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\, t$$

$$\therefore t = \frac{r^2 - a^2}{\sqrt{2\mu}}$$

القبا والبعد القبوي: Apse and Apsidal Distance

تعريف:

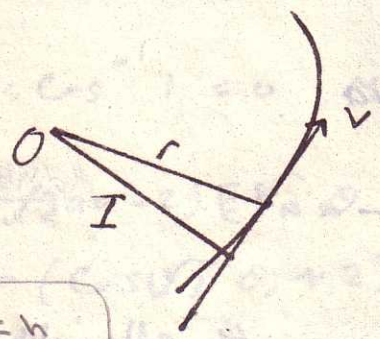
The Point P on the central orbit at which the vector of velocity is normal to the vector of position is called the Apse.

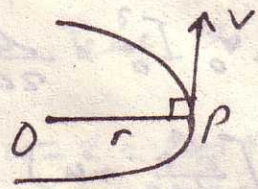
القبا هي نقطة على المسار المركزي تكون عندها السرعة في اتجاه عمودي على نصف القطر المتجه ويسمى البعد القبا عند مركز القوة بالبعد القبوي.

apse $\Leftrightarrow$ $\underline{r} \cdot \dot{\underline{r}} = 0$

i.e. $\underline{r} \cdot \underline{v} = 0$

apsidal distance then is $\|\underline{r}\|$





الشرط الرياضي للقبا:

من الواضح انه عند القبا تكون $I = r$

$\therefore$ عند القبا يكون $h = vI = vr$

ولكن من تعريف السرعة

$$v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right]$$

$\therefore$ عند القبا تكون

$$h^2u^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right]$$

$\therefore$ عند القبا $\quad \dfrac{du}{d\theta} = 0$

اي عند القبا تكون u نهاية عظمى أو صغرى اي تكون r نهاية صغرى أو عظمى

* $\dot{\underline{r}} \times \underline{r} = \underline{v} \times \underline{r} = \underline{h}$ angular momentum per unit mass

$\Rightarrow$ $v_2 \frac{h}{r} = hu$

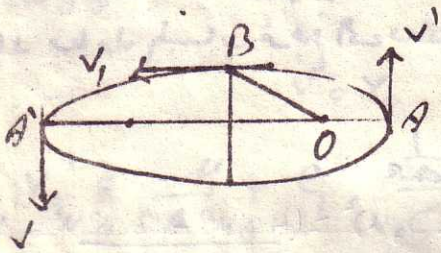
in general * is true but for an apse $\underline{v} \perp \underline{r} \Rightarrow \|\underline{v} \times \underline{r}\| = vr = h$

مثال:

يوجد على القطع الناقص قبوان اثنان فقط هما عند A, A'

لاحظ ان الموضع B ليس قبا اذ أن OB (نصف القطر المتجه) ليس عموديا على السرعة v_1.

ولها بعدان قبويان هما (OA, OA')



r is a max. r is a min.

نتائج:

١- البعد القبوي يقسم المسار المركزي الى قسمين متماثلين تماما.

٢- لو يوجد لاي مسار مركزي اكثر من بعدين قبويين اثنين يتكرر ان على التتابع الذي هال الدائرة فانه يوجد لها بعد قبوي واحد يتكرر

مثال ٥

تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية جاذبة مقدارها لوحدة الكتل $\mu(u^2 - au^3)$ فإذا قذفت النقطة من بعد a من مركز الجذب بسرعة $\sqrt{\frac{\mu}{2a}}$. اثبت ان البعد القطبي الذي فيه هو 3a وأن معادلة المسار هي $r(\cos\sqrt{3}\theta + 2) = 3a$

(Part (1)

$$h^2 = v_0^2 l_0^2 = \frac{\mu}{2a} \cdot a^2 = \frac{1}{2}\mu a$$

$$h^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = F = \mu[u^2 - au^3] \qquad \frac{d(du/d\theta)}{du} \cdot \frac{du}{d\theta} \Rightarrow$$

$$h^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = \mu[1 - au]$$

بالتكامل بالنسبة الى u

$$h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = 2\mu\left[u - \frac{au^2}{2}\right] + C_1$$

عند بدء الحركة $v = \sqrt{\frac{\mu}{2a}}$ عندما $u = \frac{1}{a}$

$$\frac{\mu}{2a} = 2\mu\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{2a}\right] + C_1 \Longrightarrow C_1 = -\frac{\mu}{2a}$$

$$\frac{1}{2}\mu a\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = 2\mu\left[u - \frac{au^2}{2}\right] - \frac{\mu}{2a} \qquad \text{I}$$

(Part 2) لايجاد البعد القطبي الذي فيه $\frac{du}{d\theta} = 0$

$$3a^2u^2 - 4au + 1 = 0$$

$$(3au - 1)(au - 1) = 0$$

$$au - 1 = 0 \Longrightarrow u = \frac{1}{a} \Longrightarrow r = a$$

$$\text{or } 3au - 1 = 0 \Longrightarrow u = \frac{1}{3a} \Longrightarrow r = 3a$$

(Part 3) لايجاد معادلة المسار نرجع الى المعادلة I

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{4}{a}\left[u - \frac{au^2}{2}\right] - \frac{1}{a^2}$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{4u}{a} - 3u^2 - \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{du}{d\theta} = \pm\sqrt{\frac{-1}{a^2} + \frac{4u}{a} - 3u^2}$$

$(D_\theta u)^2 = (4au - 3a^2u^2 - 1)$, let $au = w$

$aD_\theta u = -\sqrt{4w - 3w^2 - 1} = -\sqrt{3}\sqrt{-\frac{1}{3} - w^2 - \frac{4}{3}w}$

$\Rightarrow D_\theta(au) = D_\theta w = -\sqrt{3}\sqrt{-\frac{1}{3} - (w - \frac{2}{3})^2} =$

$D_\theta w = -\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{3} - (w - \frac{2}{3})^2} = -\sqrt{3}\sqrt{1 - (3w - 2)^2}$

$D_\theta w = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - (3w - 2)^2}$

u تتناقص مع θ عند بدء الزمن فإن $\frac{du}{d\theta}$ تكون سالبة

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{3}\sqrt{\frac{-1}{3a^2} - \left(u^2 - \frac{4u}{3a}\right)} = -\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{9a^2} - \left(u - \frac{2}{3a}\right)^2}$$

$D_\theta w = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - (3w - 2)^2} = \frac{dw}{d\theta} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{3}}d\theta = \int -\frac{3\,dw}{\sqrt{1 - (3w - 2)^2}} = -\sqrt{3}\,d\theta$

$C + \sqrt{3}\theta = \cos^{-1}(3w - 2) \Rightarrow (3au - 2) = \cos(C + \sqrt{3}\theta)$, $C = 0$

$\cos y = x \Rightarrow -\sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx} = -1/\sin y = -1/\sqrt{1-\cos^2 y} =$

$-1/\sqrt{1-x^2}$

$\sin y = x \Rightarrow \cos y \frac{dy}{dx} = 1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1/\cos y = 1/\sqrt{1-\sin^2 y}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1/\sqrt{1-x^2}$

$$\int \frac{-du}{\sqrt{\frac{1}{9a^2} - (u - \frac{2}{3a})^2}} = \sqrt{3} \int d\theta$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{-3a\, du}{\sqrt{1-(3au-2)^2}} =$$

$$\cos^{-1}(3au-2) = \sqrt{3}\,\theta + C_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cos^{-1}(3au-2) = \theta + C_2$$

وكذلك $\theta = 0$ عندما $u = \frac{1}{a}$ فتكون $C_2 = \cos^{-1} 1 = 0$

$$\cos^{-1}(3au-2) = \sqrt{3}\,\theta \Longrightarrow 3au - 2 = \cos\sqrt{3}\,\theta$$

$$\therefore r(\cos(\sqrt{3}\,\theta) + 2) = 3a$$

مثال ٦

نقطة مادية تتحرك في مسار مركزي تحت تأثير قوة طاردة $\mu m r^{-3}$ فإذا علم أن مبدأ الحركة سقط بعيدا بمقدار a عن المركز بالسرعة v_0 . اثبت أن معادلة المسار هي $a = r\cos b\theta$ حيث $b^2 = \frac{\mu + a^2 v_0^2}{a^2 v_0^2}$.

المعادلة التفاضلية للمسار هي

(Part 1)
$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-\mu u^3}{h^2 u^2} = -\frac{\mu u}{h^2}$$

$$h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = -\mu u^2 + C_1$$

وحيث أن الحركة مبدأت سقوطا $r = a$ عند $v = v_0$

$$v_0^2 = \frac{-\mu}{a^2} + C_1 \Longrightarrow C_1 = v_0^2 + \frac{\mu}{a^2}$$

وكذلك

(Part 2)
$$h^2 = v_0^2 I_0^2 = v_0^2 a^2$$

(Part 3)
$$v_0^2 a^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = -\mu u^2 + v_0^2 + \frac{\mu}{a^2} = -\mu u^2 + \left(\frac{a^2 v_0^2 + \mu}{a^2}\right)$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = b^2\left(\frac{1}{a^2} - u^2\right) \quad \left|\; (D_\theta u)^2 = \frac{1}{(v_0 a)^2}\left[-(v_0 a)^2 u^2 - \mu u^2 + \left(\frac{(a v_0)^2 + \mu}{a^2}\right)\right]\right.$$

$$\Rightarrow (D_\theta u)^2 = -u^2\left(\frac{(v_0 a)^2 + \mu}{(v_0 a)^2}\right) + \frac{b^2}{a^2} = -b^2 u^2 + \frac{b^2}{a^2}$$

$$D_\theta u = -b\sqrt{\frac{1}{a^2} - u^2} = -\frac{b}{a}\sqrt{1-(au)^2} \Longrightarrow au = w$$

$$\frac{dw}{d\theta} = -b\sqrt{1-w^2} \Rightarrow \int \frac{-dw}{\sqrt{1-w^2}} = -b\,d\theta$$

$$\frac{du}{d\theta} = -b\sqrt{\frac{1}{a^2} - u^2}$$

$$\int \frac{-du}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - u^2}} = b\theta + c_2 = \cos^{-1} au$$

$$au = \cos(b\theta + c_2)$$

$\theta = 0$ عندما $u = \frac{1}{a}$ وبالتعويض

$$\therefore 1 = \cos c_2 \implies c_2 = 0$$

$$\therefore a = r\cos b\theta$$

Notes : Rules to obtain the "initial velocity" under some "initial Condition" depending on the nature of the problem.

ملاحظات :

1 السرعة في دائرة تحت تأثير قوة نحو المركز :

من بعض المسائل تربط السرعة الابتدائية بالسرعة في دائرة تحت تأثير قوة نحو المركز فمثلاً يذكر أن النقطة المادية قذفت من موضع على بعد a من مركز الجذب بسرعة تساوي السرعة في دائرة نصف قطرها a تحت تأثير قوة نحو المركز فيكون

$$m\frac{v^2}{a} = mF(a) \implies v_0^2 = aF(a)$$

2 السرعة من اللانهاية :

من بعض المسائل تربط السرعة الابتدائية بالسرعة التي تكتسبها النقطة المادية إذا بدأت حركتها من خط مستقيم مبتدئة من السكون (سقطت من اللانهاية) حتى تصل إلى الموضع الذي قذفت منه تحت تأثير قوة نحو المركز فيكون

$V_0 = 0$

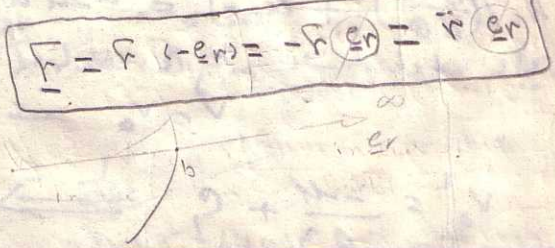
$$\underline{F} = F(-\underline{e}_r) = -F\underline{e}_r = \ddot{r}\underline{e}_r$$

$$m\ddot{r}\underline{e}_r = -mF(r)\underline{e}_r$$

$$\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} = -F(r)$$

$$\int_{\dot{r}=0}^{\dot{r}=v(a)} \dot{r}\,d\dot{r} = -\int_{\infty}^{b} F(r)\,dr$$

$$v^2(a) = [\dot{r}^2] = -2\int_{\infty}^{b} F(r)\,dr$$



Initial Conditions: at $t = 0$, $r = a$
$V_0 = V(a) \equiv V$ of a particle moving in a circular orbit under the action of a force $\equiv$ the force of the central orbit at a "

$F(\text{circular}) = \underline{F} = (-r\dot{\theta}^2, 0)$; $\underline{V} = (0, r\dot{\theta})$

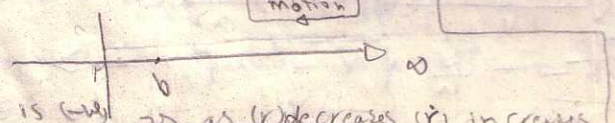
$\|\underline{F}\|^2 = r\dot{\theta}^2 = F$; $\|\underline{V}\|^2 = V^2 = (r\dot{\theta})^2 = r^2\dot{\theta}^2 = r(r\dot{\theta}^2) = rF$

$\Rightarrow \boxed{V^2 = rF}$ (circular) ; but $F_{Cir}(a) = F_{C.orb.}(a)$

and $V_{Cir.}(a) = V_{C.orb.}(a)$ $\Rightarrow$ when $\boxed{r = a}$

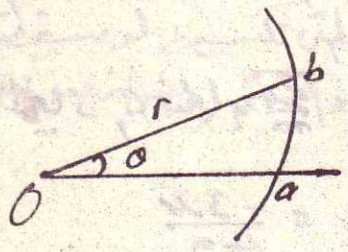
$$\boxed{\frac{V^2(a)}{a} = F(a)}$$

the (-ve) sign is put for if motion



i.e. dr is (-ve) as (r) decreases $(\dot{r})$ increases

٣ الزمن اللازم لقطع جزء من المدار المركزي



لحساب الزمن الذي يأخذه الجسيم في قطع القوس ab للمدار المركزي نلاحظ أن

$$r^2\dot{\theta} = h$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}$$

$$\int h\,dt = \int r^2\,d\theta$$

$$\therefore T = \frac{1}{h}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\,d\theta$$

وبالتعويض عن r^2 بدلالة θ من معادلة المدار يمكن تكامل الطرف الأيمن.

مثال ٧

تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية جاذبة مقدارها لوحدة الكتل $\mu\left(2u^2 - \frac{3}{4}au^3\right)$ فإذا قذفت النقطة من موضع على بعد a بسرعة $\sqrt{2}$ أمثال السرعة في دائرة تحت تأثير نفس القوة في اتجاه يميل على نصف القطر الملتقي بزاوية $\frac{1}{2}\tan^{-1}2$.
اثبت أن المعادلة القطبية للمدار هي $(5a, \frac{\pi}{3})$ ثم أوجد معادلة المدار.

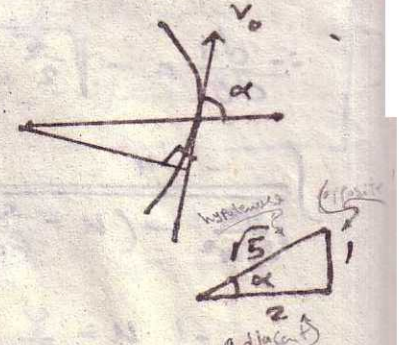
السرعة الابتدائية

$$\frac{v^2}{a} = [F]_{r=a} = \mu\left(\frac{2}{a^2} - \frac{3}{4a^2}\right) = \frac{5\mu}{4a^2}$$

(Part 1)

$$\therefore v = \sqrt{\frac{5\mu}{4a}}$$

$$\therefore v_0 = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{5\mu}{4a}} = \sqrt{\frac{5\mu}{2a}}$$



$h = v_0 \times r =$

(Part 2)

$$h = v_0 I_0 = v_0 \cdot a\sin\alpha \quad \text{where } r = a$$

$$= \sqrt{\frac{5\mu}{2a}} \cdot a\,\frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{\mu a}{2}}$$

معادلة المدار

To find the apsidal distance

(Part 3)

$$h^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = u\left[2u^2 - \frac{3}{4}au^3\right]$$

$$h^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = u\left[2 - \frac{3}{4}au\right]$$

بتكامل المعادلة بالنسبة الى u

$$h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=u\left\{4u-\frac{3}{4}au^2\right\}+C_1$$

لايجاد C_1 نعلم أن $v=v_0=\sqrt{\frac{5u}{2a}}$ عندما $u=\frac{1}{a}$

$$\frac{5u}{2a}=u\left[\frac{4}{a}-\frac{3}{4a}\right]+C_1 \Longrightarrow C_1=\frac{-3u}{4a}$$

$$\frac{ua}{2}\left\{\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right\}=u\left\{4u-\frac{3}{4}au^2\right\}-\frac{3u}{4a}$$

عند القيا $\frac{du}{d\theta}=0$

$$5a^2u^2-16au+3=0$$

$$(5au-1)(au-3)=0$$

$$5au-1=0 \Longrightarrow u=\frac{1}{5a} \Longrightarrow r=5a$$

or

$$au-3=0 \Longrightarrow u=\frac{3}{a} \Longrightarrow r=\frac{a}{3}$$

$\therefore$ الابعاد القصوى هى $\left(\frac{a}{3},5a\right)$

معادلة المسار (Part 4)

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=\frac{-5}{2}u^2+\frac{8}{a}u-\frac{3}{2a^2}$$

$$\frac{du}{d\theta}=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{16}{5a}u-u^2-\frac{3}{5a^2}}$$

$$\therefore \frac{du}{d\theta}=-\sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{49}{25a^2}-\left(u-\frac{8}{5a}\right)^2}$$

$$\int\frac{-du}{\sqrt{\frac{49}{25a^2}-\left(u-\frac{8}{5a}\right)^2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}\int d\theta$$

$$\cos^{-1}\frac{u-\frac{8}{5a}}{\frac{7}{5a}}=\sqrt{\frac{5}{2}}\theta+C_2$$

لايجاد C_2 نعلم أن $\theta=0$ عندما $u=\frac{1}{a}$

$$\cos^{-1}\frac{\frac{1}{a}-\frac{8}{5a}}{\frac{7}{5a}}=C_2 \Longrightarrow C_2=\cos^{-1}\frac{-3}{7}=\beta \Longrightarrow \cos\beta=-\frac{3}{7}$$

$$\therefore \cos^{-1}\frac{5au-8}{7}=\sqrt{\frac{5}{2}}\theta+\beta$$

$$\therefore r\left[7\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\theta+\beta\right)+8\right]=5a$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=\frac{1}{2a^2}\left(-5a^2u^2+16au-3\right)=$$
$$\frac{1}{2a^2}\left(-3-5a^2u^2+16au\right),\ \text{let } au=w \Rightarrow$$
$$\frac{5}{2a^2}\left(-\frac{3}{5}-\left(w^2-2\frac{8}{5}w\right)\right)=$$
$$(5/2a^2)\left(-(3/5)-\left(w-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{64}{25}\right)=$$
$$(5/2a^2)\left(\frac{64}{25}-\frac{15}{25}-\left(w-\frac{8}{5}\right)^2\right)=$$
$$(5/2a^2)\left(\frac{49}{25}-\left(w-\frac{8}{5}\right)^2\right)=$$
$$(5/2a^2)\left(\left(\frac{7}{5}\right)^2-\left(w-\frac{8}{5}\right)^2\right)=$$
$$(5/2a^2)\left(\frac{7}{5}\right)^2\left(1-\left(\frac{5}{7}w-\frac{8}{7}\right)^2\right)\Rightarrow$$
$$-\frac{du}{d\theta}=\sqrt{(5/2a^2)(7/5)^2}\left(1-\left(\frac{5}{7}w-\frac{8}{7}\right)^2\right)^{1/2}$$
$$-du/d\theta=\frac{7}{5a}\sqrt{5/2}\left(1-\left(\frac{5}{7}w-\frac{8}{7}\right)^2\right)^{1/2}\Rightarrow$$
$$-\frac{d\left(\frac{5}{7}au\right)}{d\theta}=-\frac{d\frac{5}{7}w}{d\theta}=\sqrt{5/2}\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}w-8/7\right)^2}$$
$$\int\sqrt{5/2}\,d\theta=\int-\frac{d\left(\frac{5}{7}w\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}w-8/7\right)^2}}\Rightarrow$$
$$\sqrt{5/2}\,\theta+C=\cos^{-1}\left(\frac{5w-8}{7}\right)$$
$$7\cos\left(\sqrt{5/2}\,\theta+C\right)+8$$
$$5au$$

$\sec x = 1/\cos x$; $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$; $\cot x = 1/\tan x$

مثال ٨

تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية جاذبة مقدارها لوحدة الكتل $\mu(5u^3 + 8a^2u^5)$ فإذا قذفت النقطة المادية مبتعدة على بعد a بالسرعة التي تكتسبها لو سقطت من السكون من مالانهاية . اثبت ان معادلة المسار هي $r = a\cos\frac{2}{3}\theta$ ثم اوجد الزمن اللازم لكي يقطع نصف المنحنى زاوية $\frac{3\pi}{4}$.

السرعة من مالانهاية :

(Part 1) $$\ddot{r} = -F = -\mu\left(\frac{5}{r^3} + \frac{8a^2}{r^5}\right) \Rightarrow \dot{r}\frac{dr}{dr}$$

$$\frac{1}{2}V_0^2 = \frac{1}{2}\dot{r}^2 = -\mu\int_{\infty}^{a}\left(\frac{5}{r^3} + \frac{8a^2}{r^5}\right)dr = \mu\left[\frac{5}{2r^2} + \frac{2a^2}{r^4}\right]_{\infty}^{a} = \frac{9\mu}{2a^2}$$

$$V_0 = \frac{3}{a}\sqrt{\mu}$$

(Part 2) $$h = V_0 I_0 = \frac{3}{a}\sqrt{\mu}\cdot a = 3\sqrt{\mu}$$

For $\underline{r} \times \underline{V}_0 = \underline{h} \Rightarrow$
$\|\underline{h}\| = \|\underline{r}\| \|\underline{V}_0\| \sin\pi/2$

(Part 3) $$h^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = \mu(5u^3 + 9a^2u^5)$$

$$h^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = \mu(5u + 8a^2u^3)$$

$$h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = \mu(5u^2 + 4a^2u^4) + C_1$$

$$\frac{9\mu}{a^2} = \mu\left(\frac{5}{a^2} + \frac{4}{a^2}\right) + C_1 \Longrightarrow C_1 = 0$$

$$9\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = 5u^2 + 4a^2u^4$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{4}{9}a^2u^4 - \frac{4u^2}{9}$$

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{2}{3}au\sqrt{u^2 - \frac{1}{a^2}}$$

$\sec y = x = 1/\cos y$; $y = \sec^{-1}x$
$\Rightarrow 1 = \frac{+\sin y}{\cos^2 y}\cdot\frac{dy}{dx}$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\frac{dy}{dx} = +1/\frac{\tan y}{\cos y} = +1/x\sqrt{x^2-1}$

$$\int\frac{du}{u\sqrt{u^2 - \frac{1}{a^2}}} = -\frac{2}{3}a\theta + C_2 = a\sec^{-1}au$$

$$a\int\frac{a\,du}{au\sqrt{(au)^2 - 1}} = -\frac{2}{3}a\int d\theta$$

$$C_2 = a\sec^{-1}1 = 0$$

$$\sec^{-1}au = -\frac{2}{3}\theta \Longrightarrow au = \sec\left(-\frac{2}{3}\theta\right)$$

$$\frac{a}{r} = \sec\left(-\frac{2}{3}\theta\right)$$

$$\frac{r}{a} = \cos\left(-\frac{2}{3}\theta\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\theta\right)$$

∴ معادلة المسار هي

$$r = a\cos\left(\frac{2}{3}\theta\right)$$

لإيجاد الزمن (Part 4)

$$r^2\dot{\theta} = h = 3\sqrt{\mu} = r^2\frac{d\theta}{dt} = a^2\cos^2\left(\frac{2}{3}\theta\right)\frac{d\theta}{dt}$$

$$3\sqrt{\mu}\,T = a^2\int\cos^2\left(\frac{2}{3}\theta\right)d\theta = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\left(1+\cos\frac{4}{3}\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left[\theta + \frac{3}{4}\sin\frac{4}{3}\theta\right]_0^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{2}a^2\left[\frac{3\pi}{4}\right]$$

$$T = \frac{1}{2}a^2\cdot\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{1}{3\sqrt{\mu}} = \frac{\pi a^2}{8\sqrt{\mu}}$$

$\cos 2\phi = 2\cos^2\phi - 1$

$\frac{1+\cos 2\phi}{2} = \cos^2\phi$

$\phi = 2\theta/3$

الحركة تحت تأثير قانون التربيع العكسي :

Motion according to the (Inverse square law)

عندما يتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية جاذبة تتناسب عكسيا مع مربع البعد عن مركز الجذب فإنه يمكن إثبات أن المسار في هذه الحالة يكون قطعا مخروطيا . إي أن المسار يكون قطعا ناقصا (Ellipse) أو مكافئا (Parabola) أو زائدا (Hyperbola) وسوف يتحدد نوع القطع حسب الشروط الابتدائية للحركة .

هذا النوع من القوى المركزي ($F = \frac{\mu}{r^2}$) له أهمية خاصة من الناحية الطبيعية لأنه يمثل القوة بين كتلتين كهربيتين أو مغناطيسيتين مختلفتين في الإشارة كما أنه يمثل قوة الجذب بين كتلتين مادتين m_1 و m_2 طبقا لقانون نيوتن للجاذبية .

$V_B - V_A = \frac{W_{AB} \text{ by external agent}}{q_0}$

$V - V_0 = \text{work}/\text{mass}$

١- طاقة الجهد Potential Energy

تعريف :

طاقة الجهد هو شغل المبذول لنقل جسيم كتلة تساوي الوحدة من اللانهاية إلى الموضع الذي يشغله

Potential energy ≡ work done to move unit mass from infinity to the position it is in

فإذا كان الجسيم يتحرك تحت تأثير قوة مركزية جاذبة مقدارها F لوحدة الكتل فإن طاقة الجهد عند موضع على بعد r من مركز الجذب O تقدر بالشغل المبذول لنقل وحدة الكتل من اللانهاية إلى الموضع P الذي يشغله الجسم وكذلك

$dW = -F\,dr$

$E_{gr} = -F_r e_r \cdot dr e_r = -F\,dr = dW_{agent}$

Field

$(\Delta r \to -ve)$

$\Delta r e_r \cdot -F e_r$

$F e_r \cdot \Delta r \cdot -e_r = -F\,\Delta r$

movement

$\underline{F}_{agent} = -\underline{F}_{field}$

$\underline{F}_{field}$ ← P ——— ∞

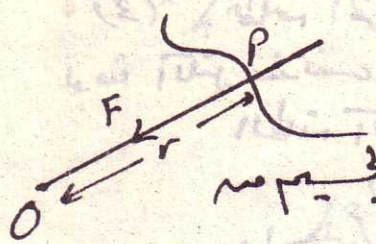
$\underline{dr}$ $\quad$ $\underline{e}_r$

the work done by an external agent to move unit mass from infinity to some point without acceleration.

$= qE\,dr_{e_r} = qE\,dr = qE\,dr$

$F = qE$

$F = qE\,e^{i\theta}$



$\therefore W$ هو الشغل الذى تبذله القوة فى تحريك الجسيم من ∞ عائدة الى الموضع P

$$W = \int_{\infty}^{r} -F\,dr$$

ولكن $F = \frac{\mu}{r^2}$

$$\therefore W = \int_{\infty}^{r} -\frac{\mu}{r^2}\,dr = \left[\frac{\mu}{r}\right]_{\infty}^{r} = \frac{\mu}{r}$$

$\therefore$ طاقة الجهد عند الموضع P $\quad V = -\frac{\mu}{r}$

مثال :

طاقة الجهد عند موضع على بعد a من مركز الجذب $= -\frac{\mu}{a}$

فاذا كانت سرعة الجسيم عند هذا الموضع $= v_0$

$\therefore$ طاقة الحركة عند هذا الموضع لوحدة الكتل $= \frac{1}{2}v_0^2$

$\therefore$ الطاقة الكلية للجسيم عند هذا الموضع لوحدة الكتل $= \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu}{a}$

Particle's total energy per unit mass

مثال ٩

تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية جاذبة مقدارها لوحدة الكتل $\frac{\mu}{r^2}$ نحو مركز ثابت . اثبت انه مسار هذه النقطة قطع مخروطى وعين نوعه .

المعادلة التفاضلية للمسار

$$h^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = \frac{\mu}{r^2} = \mu u^2$$

$$h^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = \mu \qquad (1)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d(du/d\theta)}{d\theta} = \frac{du'}{d\theta} = \frac{du'}{du}\cdot\frac{du}{d\theta} = u'\frac{du'}{du}$$

$$\frac{1}{2}h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = \mu u + c_1$$

$$\therefore \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = c_1 \qquad (2)$$

ولكن $\frac{1}{2}v^2$ = طاقة الحركة لوحدة الكتل

، $\frac{-\mu}{r}$ = طاقة الجهد لوحدة الكتل

(3) طاقة الحركة لوحدة الكتل عند أى موضع + طاقة الجهد

لوحدة الكتل عند نفس الموضع = مقدار ثابت $= C_1$

الطاقة الكلية لوحدة الكتل $= E$

$$\therefore E = C_1 \qquad (4)$$

اى ان الطاقة الكلية عند الموضع P = الطاقة الكلية عند موضع P' $= E = \cdots$

تعريف

اذا كانت القوة المركزية بحيث تكون الطاقة الكلية عند اى موضع ثابتة يسمى مثل هذه القوى بالقوى المحافظة Conservative Force

ويسمى مجال هذه القوى بالمجال المحافظ

A force field is said to be conservative if the total energy of a moving body is constant

i.e Something like the total energy is found in a space that dosn't have time

i.e a space independent of time space of energy, here

من معادلتى (2) ، (4)

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = E$$

$$\therefore v^2 = \frac{2\mu}{r} + 2E$$

وهذه تعطى سرعة النقطة المتحركة عند اى موضع حيث E = ثابت

فاذا بدأت الحركة عندما كانت $v = v_0$ ، $r = a$

$$\therefore E = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu}{a}$$

$$\therefore h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = 2\mu u + 2E$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2\mu u}{h^2} + \frac{2E}{h^2} - u^2$$

$$\frac{du}{d\theta} = \pm\sqrt{\frac{2E}{h^2} - \left(u^2 - \frac{2\mu u}{h^2}\right)} = \pm\sqrt{\frac{2E}{h^2} + \frac{\mu^2}{h^4} - \left(u - \frac{\mu}{h^2}\right)^2}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2Eh^2 + \mu^2}{h^4} - \left(u - \frac{\mu}{h^2}\right)^2}$$

$$\mp\int d\theta = \int \frac{-du}{\sqrt{\frac{u^2 + 2Eh^2}{h^4} - \left(u - \frac{\mu}{h^2}\right)^2}} = \int \frac{-du}{\sqrt{c^2 - \left(u - \frac{\mu}{h^2}\right)^2}}$$

حيث $c^2 = \frac{u^2 + 2Eh^2}{h^4}$

$$\mp\theta + C_2 = \cos^{-1}\frac{\left(u - \frac{\mu}{h^2}\right)}{c}$$

$$\therefore u - \frac{\mu}{h^2} = c\cos(C_2 \mp \theta) = \frac{\sqrt{u^2 + 2Eh^2}}{h^2}\cos(C_2 + \theta)$$

$$\therefore u = \frac{\mu}{h^2}\left[1 + \sqrt{1+\frac{2Eh^2}{\mu^2}}\cos(C_2 \mp \theta)\right]$$

$$= \frac{\mu}{h^2}\left[1 + \sqrt{1+\frac{2Eh^2}{\mu^2}}\cos(\theta + \beta)\right]$$

$$\beta = \mp C_2$$

$$\therefore r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + \left(\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{\mu^2}}\right)\cos(\theta+\beta)}$$

The general equation of Conics.

بمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة العامة للقطع المخروطي

$$r = \frac{L}{1 + e\cos\theta}$$

$e \equiv$ eacentricity

حيث L نصف طول الوتر البؤري العمودي، e الاختلاف المركزي للقطع.
نستنتج أنه المسار قطع مخروطي بؤرته عند تركز القوة واختلافه المركزي

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}}$$

وطول نصف الوتر البؤري العمودي

Semi-Latus rectum $= L = \frac{h^2}{\mu}$

ويمكن التمييز بين الحالات الثلاث الآتية:

Hyperbolic orbit

١- المسار قطع زائد اي أنه

$$e > 1 \Longrightarrow \boxed{E > 0} \Longrightarrow \frac{1}{2}v^2 > \frac{\mu}{r}$$

اي عند اي نقطة يكون

$$v^2 > \frac{2\mu}{r} \quad , \quad v_0^2 > \frac{2\mu}{r_0}$$

يمكن تحقيق هذا الشرط عندما تكون r_0 كبيرة جدا $(r_0 \to \infty)$ كما هو الحال بالنسبة للمذنبات التي تقترب الى الشمس من مسافات بعيدة.

٢- المسار قطع مكافئ اي انه

Parabolic orbit

$$e = 1 \Longrightarrow \boxed{E = 0} \Longrightarrow v^2 = \frac{2\mu}{r} \Longrightarrow v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

وتسمى v_0 بسرعة الهروب

Speed of escape $= v_p = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$

وهي اقل سرعة ابتدائية التي لو قذف بها الجسم لا يعود الى وضعه الابتدائي. (نقطة القذف)

Speed of escape is the least speed of a body at if it were thrown by it; the body will not return to its initial position.

Elliptic orbit

* - المسار قطع ناقص اى ان

$$e < 1 \Rightarrow \boxed{E < 0} \Rightarrow v^2 < \frac{2\mu}{r} \Rightarrow v_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}$$

من الناحية الطبيعية تعتبر هذه الحالة اهم الحالات لانها تمثل حركة الالكترون حول النواة وحركة الكواكب حول الشمس.

تمارين على الباب الأول

١ تتحرك نقطة في مستوى بحيث كانت سرعتها في اتجاه ونى الاتجاه العمودي على نصف القطر هي $(\lambda r, \mu\theta)$ على الترتيب. اثبت ان العجلة في اتجاه نصف القطر هي $(\frac{\mu^2\theta^2}{r} - r\lambda^2)$, $\mu\theta(\lambda + \frac{\mu}{r})$.

٢ تتحرك نقطة مادية في مستوى بحيث تكون مجلدات نصف قطرها ومستعرضها هما على الترتيب $(\frac{2b\cos\theta}{r^3}, \frac{b\sin\theta}{r^3})$. اثبت ان $(r^2\dot\theta)^2 = c - 2b\cos\theta$ وبرهن ذلك اثبت ان اذا كانت $r = a$, $\dot r = 0$ عندما $t = 0$ فان $r^2 = ft^2 + a^2$ حيث f, c ثابتان.

٣ بدأت نقطة مادية الحركة من القطب في اتجاه الخط الابتدائي بسرعة قدرها $\frac{g}{\omega}$ وتحركت بسرعة زاوية منتظمة ω حول القطب وبعجلة قطبية سالبة $-g$ وثابتة. اثبت ان r تكون دائما سالبة وانه معادلة المسار هي $\omega^2 r = g(1 - e^{-\theta})$.

٤ تدور انبوبة رفيعة في مستوى افقي حول احد طرفيها بسرعة زاوية ω ثابتة. فاذا علم ان عند بدء الحركة تحركت نقطة مادية بالسرعة الابتدائية V_0 في اتجاه الانبوبة من نقطة تبعد بقدر a عن الطرف الثابت. اثبت ان بعد مضي زمن t تكون النقطة المادية على بعد $a\cosh\omega t + \frac{V_0}{\omega}\sinh\omega t$ من الطرف الثابت وأوجد رد فعل الانبوبة.

٥ جسيمان كتلتهما $m, 2m$ وصلا بطرفي خيط طوله $2a$ ويمر خلال حلقة ملساء مثبتة في نقطة أعلى فاذا بدأت الحركة عندما كان الخيط مشدودا والحلقة في منتصف الخيط ثم قذفت الكتلة الصغرى بسرعة أفقية V_1 في اتجاه عمودي على طول الخيط فاثبت ان الكتلة الكبرى تصل الى الحلقة بسرعة $\frac{1}{2}V_1$.

٦ في المسألة السابقة اذا قذفت الكتلة الصغرى بسرعة أفقية V_1 من اتجاه يميل بزاوية $60°$ على طول الخيط. اثبت ان الكتلة الكبرى تصل الى الحلقة بسرعة $\frac{\sqrt{2}}{4}V_1$.

٧ قذفت نقطة مادية تتصل بخيط طوله l ويتصل طرفه الآخر بنقطة ثابتة بسرعة ابتدائية قدرها $2\sqrt{gl}$ عندما كان الخيط رأسيا في الاتجاه الصعودي على الخيط. اثبت ان المقذوف لا يكمل دورة كاملة ثم احسب اقصى ارتفاع يصل اليه المقذوف.

٨ وصلت نقطتان ماديتان كتلتهما $m, 3m$ بخيط عديم مرونة ووضعت على نضد افقي املس عند النقطتين a, b وكان الخيط يمر في حلقة ملساء مثبتة عند O بحيث كان Oab خط مستقيم، $Oa = l$. قذفت النقطة الأولى a في اتجاه عمودي على الخيط بالسرعة $\sqrt{\frac{1}{5}}$ فاذا كانت r هي بعد الكتلة m عن O، θ هي الزاوية التي يصنعها الخيط مع الوضع الابتدائي لبعد مضي زمن t فاثبت ان
$4\dot{r}^2 = V_0^2\{1 - l^2/r^2\}$, $r = l\sec\theta/2$

٩ وصل جسيم b كتلته m بأحد طرفي خيط مرن طوله الطبيعي a ومعامل مرونته λ ثم ثبت الطرف الآخر بخيط من النقطة c على نضد افقي أملس وقذف الجسيم على النضد بسرعة V_1 من اتجاه عمودي على ab عندما كان $bc = a$. فاذا كان أقصى طول يبلغه الخيط هو $2a$ فاثبت ان
$3mV_1^2 = 4\lambda a$.

١٠ وضع جسيم صغير في حالة اتزان في اعلى موضع من سطح كروي أملس ثابت فاذا ازيح هذا الجسيم قليلا عن موضع الاتزان. فاثبت انه يقول سطح الكرة عندما يصبح على بعد زاوي قدره $\cos^{-1}\frac{2}{3}$ من موضع الاتزان.

١١ تتزلج حلقة على سلك املس مثبت على شكل دائرة نصف قطرها a فاذا قذفت الحلقة افقيا من اسفل موضع بالسرعة $\sqrt{3ag}$. اوجد
أولا: الموضع الذي تفقد فيه الحلقة موضع تماسها مع السلك وسرعة الحلقة عندئذ.
ثانيا: أقل سرعة يمكن ان تقذف بها الحلقة من اسفل موضع كي تعمل دورة كاملة.

١٢ علق جسيم صغير في نهاية خيط طوله a ثم ثبت الطرف الآخر للخيط وقذف الجسيم بسرعة افقية $\sqrt{\frac{7}{2}ag}$. اوجد الموضع الذي يتلاشى عنده الشد في الخيط.

١٣ تتحرك نقطة مادية في مسار $r^n = a^n \cos n\theta$ ، اوجد قانون القوة والسرعة عند اى نقطة .

١٤ تتحرك نقطة مادية في مسار مركزي تحت تأثير قوة مركزية $\mu m \frac{(r+2a)}{r^5}$ الى المركز. قذفت هذه النقطة من نقطة تبعد بقدر a بالسرعة $v_0 = \sqrt{\frac{5\mu}{3a^3}}$ في اتجاه يصنع زاوية $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{4}{3}$ مع الخط الابتدائي . اثبت ان معادلة المسار هي $r = a(1+2\sin\theta)$.

١٥ تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية جاذبة مقدارها μu^5 لوحدة الكتل فاذا قذفت النقطة المادية من موضع على بعد a من مركز الجذب بسرعة $\sqrt{\frac{\mu}{2a^4}}$ في اتجاه يميل بزاوية α على نصف القطر المتجه فاثبت ان المسار دائرة تمر بمركز الجذب وقطرها $a\cos\alpha$.

١٦ تتحرك نقطة مادية تحت تأثير القوة المركزية الجاذبة $F = \mu u^3$ لوحدة الكتل حيث μ ثابت فاذا قذفت النقطة المادية من قبا على بعد a من مركز الجذب بسرعة $\sqrt{\frac{4\mu}{3a^2}}$. اثبت ان معادلة المسار هي $a = r\cos\frac{\theta}{2}$

١٧ تتحرك نقطة مادية كتلتها m في مسار مركزي تحت تأثير قوة جاذبة $\mu m\left\{\frac{3a}{r^4} - \frac{2(a^2-b^2)}{r^5}\right\}$ حيث a اكبر من b فاذا علم انها بدأت الحركة من القبا $\{r = (a+b), \theta = 0\}$ بسرعة $v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a+b}}$

اثبت ان المسار قبا آخر عند $\{\theta = \pi, r = a-b\}$ وان الزمن اللازم للوصول بينهما يساوي $T = \frac{2a^2+b^2}{2\sqrt{\mu}}\pi$

١٨ تتحرك نقطة مادية تحت تأثير القوة المركزية الجاذبة μu^3 لوحدة الكتل حيث μ ثابت فاذا قذفت النقطة المادية من موضع على بعد a من مركز الجذب بسرعة $\sqrt{\frac{\mu}{a^2}}$ في اتجاه يميل بزاوية $\frac{\pi}{4}$ على نصف القطر المتجه. اثبت ان معادلة المسار هي $r = ae^{\theta}$ وان الزمن الذي تأخذه حتى تكون على بعد r من المركز هو $r^2 - a^2/\sqrt{2\mu}$.

١٩ تتحرك نقطة في مسار مركزي تحت تأثير العجلة $\mu[r^5 - a^4r]$ فاذا علم انها قذفت من قبا بعيد عن مركز الجذب بقدر a بالسرعة $v_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{3}}a^3$. اثبت ان المسار هو المنحنى $x^4 + y^4 = a^4$

الباب الثاني

الحركة المقيدة لنقطة مادية في مستوى

Constrained Motion of a point in a plane

في دراستنا السابقة لحركة نقطة مادية استخدمنا الاحداثيات الكارتيزية (x,y) ثم بعد ذلك الاحداثيات القطبية (r,θ) [وهنا نتناول دراسة حركة النقطة المادية عندما تكون قيود الحركة على منحنى او سطح معلوم وهذه يسهل دراستها باستعمال ما يسمى بالاحداثيات الذاتية Intrinsic Coordinates

نفرض أن A نقطة ثابتة على منحنى ما و P اى نقطة على المنحنى بحيث يقاس s من A هو s.

نفرض أن $\overrightarrow{PM}$ هو اتجاه المماس عند نقطة P في اتجاه تزايد s. و ψ هي الزاوية التي يصنعها المماس PM مع خط ثابت في المستوى OX.

ويمكن تحديد موضع النقطة P بالاحداثيات (s,ψ). تسمى هذه الاحداثيات بالاحداثيات الذاتية للمنحنى وتسمى العلاقة بينهما $s=f(\psi)$ بالمعادلة الذاتية للمنحنى ويلاحظ أن s يمكن ان تكون موجبة او سالبة كما هو الحال في الاحداثيات القطبية وكذلك تقاس الزاوية ψ يطبق عليها نفس القواعد المشار اليها في قياس الزاوية θ.

١- السرعة:

نعتبر حركة نقطة مادية على منحنى مستوى AB نفرض أن P موضع النقطة المتحركة عند اللحظة t. فاذا كانت A نقطة ثابتة على المنحنى فانه موضع النقطة P يتعين بالاحداثيات الذاتية (s,ψ). فتكون سرعة النقطة المادية على المنحنى

$$\underline{v} = \frac{d\underline{s}}{dt}$$

Since $\underline{r} = (s,\psi)$

$s\,\hat{\underline{i}} + \psi\,\hat{\underline{j}} = s\,\underline{i} + \psi\,\underline{j}$

GOTV Page (15) Vector field analysis

$$\Rightarrow \frac{d\underline{r}}{dt} = \left(\frac{ds}{dt}, 0\right) = \frac{ds}{dt}\,\underline{i} = \frac{ds}{dt}\,\hat{\underline{s}} = \underline{v}$$

$\underline{v} = \frac{ds}{dt}\,\underline{i}$

وتعمل في اتجاه المماس عند P. أي ان السرعة المعطية للنقطة المادية تعمل في اتجاه المماس للمنحنى عند اى نقطة.

Intrinsic Coordinates :- this representation can be used when a particle moves along a curve or on a surface. The arc length s along the curve from some fixed point to P.

٢- مركبتا العجلة :

لايجاد مركبتا عجلة لنقطة المادية في اتجاهي المماس والعمودي عليه للداخل نلاحظ أنه

$$\underline{v} = \frac{ds}{dt}\,\underline{i} + 0\,\underline{j}$$

حيث $\frac{ds}{dt}$ معدل الوحدة في اتجاهي المماس والعمودي عليه للداخل

$$\therefore \underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\,\underline{i} + \frac{ds}{dt}\,\underline{i}'$$

ولكن

$$\underline{i}' = \psi'\,\underline{j}$$

$$\therefore \underline{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\,\underline{i} + \frac{ds}{dt}\,\psi'\,\underline{j}$$

$$\therefore \text{المركبة المماسية للعجلة} \quad \frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} = v\frac{dv}{ds} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d(ds/dt)}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

والمركبة العمودية للعجلة

$$\frac{ds}{dt}\psi' = \frac{ds}{dt}\frac{d\psi}{dt} = v\frac{d\psi}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$= v^2\frac{d\psi}{ds} = \frac{v^2}{\rho}$$

حيث

$$\boxed{\rho = \frac{ds}{d\psi}}$$

وتسمى قطر التقوس

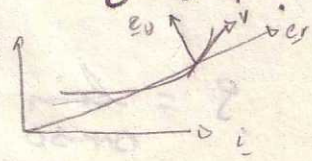
$$\therefore \underline{a} = \left[\frac{d^2s}{dt^2}\,,\ \frac{v^2}{\rho}\right]$$

لاحظ أن المركبة العمودية (normal component) للعجلة تكون دائما للداخل
وأن المركبة المماسية (tangential component) للعجلة تكون دائما في اتجاه تزايد البعد المقوس s.

in contrast with the radial and transverse components in Polar coordinates →

$$\underline{r} = r\,\underline{e}_r + \theta\,\underline{e}_\theta$$
$$\dot{\underline{e}}_r = \dot\theta\,\underline{e}_\theta \ ;\ \underline{e}_\theta = -\theta\,\underline{e}_r$$

$$\underline{v} = \dot r\,\underline{e}_r + r\dot\theta\,\underline{e}_\theta$$
$$\underline{a} = (\ddot r - r\dot\theta^2)\underline{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot\theta)}{dt}\,\underline{e}_\theta$$



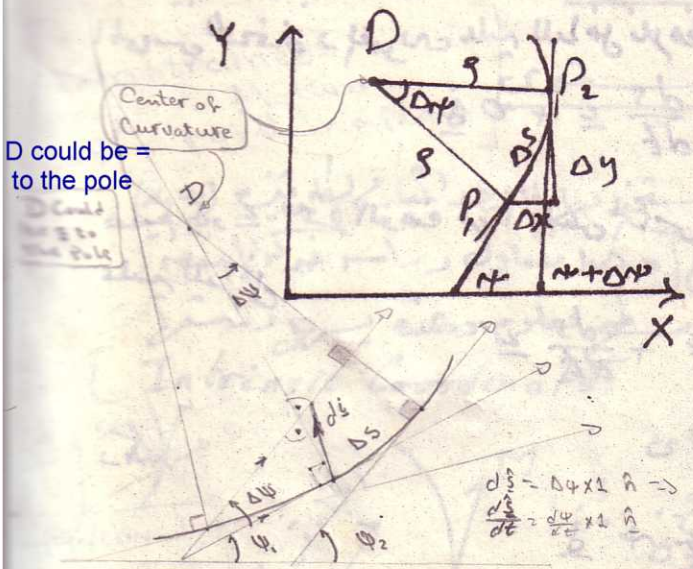
but w.r.t. Intrinsic coordinates →

$$\underline{r} = s\,\hat{\underline{s}} + \psi\,\hat{\underline{n}}$$
$$\dot{\hat{\underline{s}}} = \dot\psi\,\hat{\underline{n}}$$

$$\underline{v} = v\,\hat{\underline{s}}\ ,\quad \underline{a} = v\frac{dv}{ds}\,\hat{\underline{s}} + \frac{v^2}{\rho}\,\hat{\underline{n}}$$

Some relations from Differential Geometry:-

٢- بعض العلاقات الهندسية التفاضلية :



(i) إذا كانت ψ هي الزاوية التي يصنعها المماس للمنحنى $y=f(x)$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن ميل المماس عند أي نقطة

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx}$$

(ii)
$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{\Delta x}^2 + \overline{\Delta y}^2$$

$$\frac{\overline{P_1P_2}^2}{\Delta s^2} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2$$

وعندما $\Delta s \to 0$ فإن $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$

$$\therefore 1 = \lim_{\Delta s\to 0}\left[\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2\right]$$

given C as $y = f(x)$

(2)
$$= \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{dx}\right)^2 = [\,1 + (dy/dx)^2\,]$$

$$\therefore \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\therefore \boxed{s = \int \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx + c}$$

or

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

$$\boxed{s = \int \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy + c'}$$

[This relation enable us to obtain s once $y=f(x)$ is known.]

هاتين العلاقتين تعطيانا طول المنحنى s إذا علمت معادلة المنحنى الكارتيزية .

(iii) بهذا الشكل يمكننا تعريف مركز التقوس بأنه نهاية موضع النقطة D عندما تقترب (2) نقطة P_2 من نقطة P_1 ويعرف الطول DP_1 باسم نصف قطر التقوس ρ .

من الشكل

$$\Delta s = DP_1\,\Delta\psi = \rho\,\Delta\psi$$

$$\rho = \lim_{\Delta\psi\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta\psi} = \frac{ds}{d\psi}$$

that's to say, ρ is no longer taken as an independent variable, but as a dependent variable, i.e. function of ψ .

هذه العلاقة تعطي نصف قطر التقوس إذا علمت ψ, s .

The center of curvature is defined to be the limiting position of point D when point P_2 approaches point P_1, and DP_1 is the

given $y = f(x)$ how to find ρ :-

[3] ولإيجاد نصف قطر التقوس اذا علمت معادلة المنحنى الكارتيزية

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos^2 x - (-\sin^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2\psi \frac{d\psi}{dx}$$

$$= [1 + \tan^2\psi]\frac{d\psi}{dx} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{d\psi}{dx}$$

$$\therefore \rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{d\psi}{dx}} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} =$$

To get $d\psi/dx$ =>
since $\tan\psi = dy/dx$
$\frac{d\tan\psi}{d\psi}\cdot\frac{d\psi}{dx} = d^2y/dx^2$
$\frac{1}{\cos^2\psi}\frac{d\psi}{dx} = d^2y/dx^2$
$d\psi/dx = (d^2y/dx^2)\cdot\frac{1}{\cos^2\psi}$
$\frac{d^2y/dx^2}{1+(dy/dx)^2}$

$$= \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

given C as $y = f(x)$ so we can get (ρ)

For $x^2 = 4ay$

$4a\frac{dy}{dx} = 2x$; $\frac{dy}{dx} = (x/2a)$

$4a\frac{d^2y}{dx^2} = 2$ $\frac{d^2y}{dx^2} = (1/2a)$

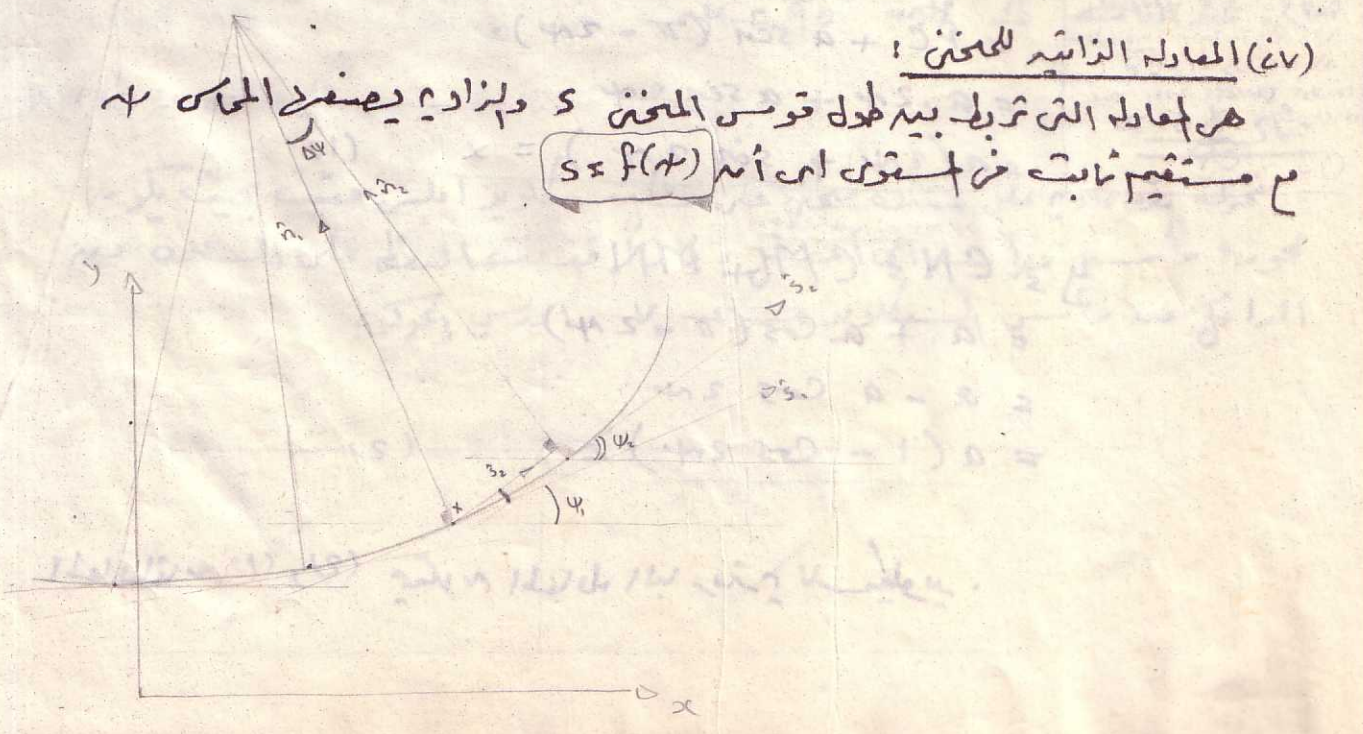
$\rho = \frac{[1 + x^2/4a^2]^{3/2}}{1/2a} = \frac{[2a(1+y)]^{3/2}}{2a} = \rho$

$$\therefore \boxed{\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}}$$

$$\boxed{\rho = [1 + (D_x y)^2]^{3/2} / D_x^2 y}$$

(ب) المعادلة الذاتية للمنحنى :

هى المعادلة التى تربط بين طول قوس المنحنى s والزاوية بين المماس ψ مع مستقيم ثابت فى المستوى اى أنه $s = f(\psi)$



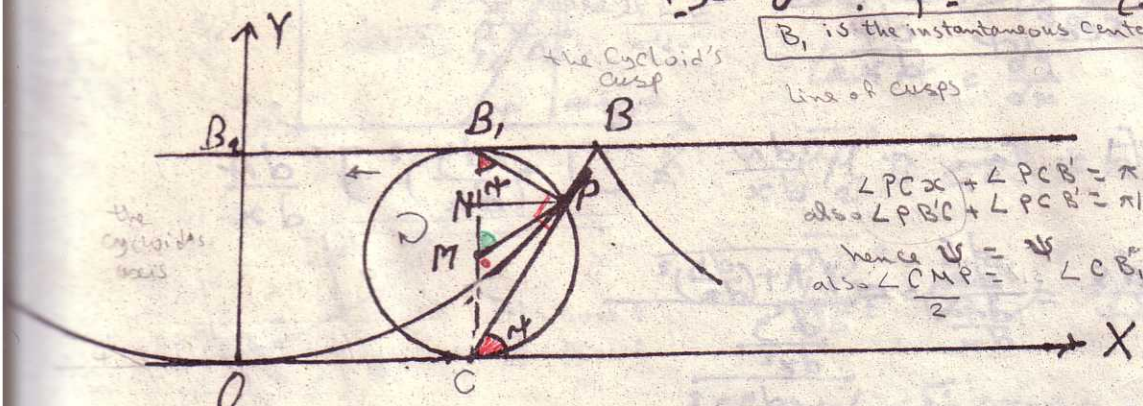
٤- المنحنى الدوري (السيكلويد) Cycloid

The locus of a fixed point on a circular disc when it slides on a line in the plane of the disc is called cycloid.

تعريف:

الدوري او السيكلويد هو المحل الهندسي لحركة نقطة ثابتة على محيط قرص دائري عندما يتدحرج على مستقيم ثابت في مستويه.

B_1 is the instantaneous center of rotation for the disc



$\angle PCx + \angle PCB' = \pi/2$
also $\angle PB'C + \angle PCB' = \pi/2$
hence $\psi = \psi$
also $\angle CMP = \frac{1}{2}\angle CB_1P$

$\angle PCx = \psi \Rightarrow$
$\psi + \angle PCB_1 = \pi/2$ but
$\angle PCB_1 + \angle PB_1C = \pi/2$
$\Rightarrow \angle PB_1C = \psi = \angle B_1PM$
$\Rightarrow \angle B_1MP = \pi - 2\psi \Rightarrow$
$\angle PMC = \pi - (\pi - 2\psi) = 2\psi$

The parametric equation for Cycloid.

المعادلة البارامترية للسيكلويد

نفرض أن BB_1B_2 هو المستقيم الذي يتدحرج عليه القرص وأن M هو مركز القرص عند اللحظة t وأن P هي النقطة التي ترسم السيكلويد وأن P كانت منطبقة على B عند بدء الحركة وأن O موضع P بعد أن يدور القرص دورة.

باختيار O نقطة الأصل، OC محور السينات، OB_2 محور الصادات نفرض أن $P = (x, y)$. [وحيث أن B_1 هو مركز لحظة القرص.

وحيث أن $\overrightarrow{PC}$ محمودي على B_1P

∴ الاتجاه $\overrightarrow{PC}$ هو اتجاه حركة النقطة P عند هذه اللحظة.]

∴ PC مماس للسيكلويد BO عند P

الزاوية $P\hat{C}X = \psi$ since $\angle PMN = \pi - 2\psi$ and $MP = a \Rightarrow$ (*)

when P at Q, for Point P to reach its Position indicated above $\Rightarrow$ arc $\widehat{CP}$ must sweeps over the distance $\overline{OC} \Rightarrow$ $OC = \widehat{CP}$

$$x = \overline{OC} + \overline{PN}$$
$$= \widehat{PC} + a\sin(\pi - 2\psi) \quad (*)$$
$$= a \cdot 2\psi + a\sin 2\psi$$
$$= a(2\psi + \sin 2\psi) = x \qquad (1)$$

1st order term of the expansion of $\sin(\psi)$

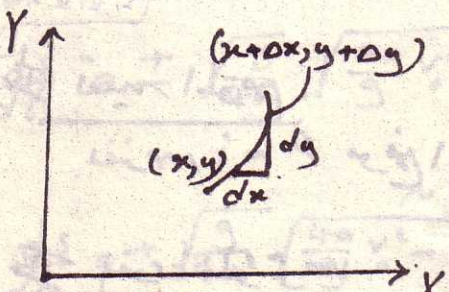
$$y = CN = CM + MN$$
$$= a + a\cos(\pi - 2\psi)$$
$$= a - a\cos 2\psi$$
$$= a(1 - \cos 2\psi) = y \qquad (2)$$

المعادلتان (1)، (2) يمثلان المعادلة البارامترية للسيكلويد.

تسمى النقطة B نهاية السيكلويد cusp وتسمى النقطة O برأس السيكلويد، وتسمى OY محور السيكلويد وتسمى المستقيم BB_2 بخط النهايات line of cusps ويلاحظ أن BB_2 هو نصف محيط الدائرة.

$$BB_2 = \pi a$$
$$CB_1 = 2a$$

المعادلة الذاتية للسيكلويد Intrinsic equation



$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$
$$dx = a(2+2\cos 2\psi)\,d\psi$$
$$dy = 2a \sin 2\psi \, d\psi$$
$$\therefore ds^2 = 4a^2[1 + 2\cos 2\psi + \cos^2 2\psi + \sin^2 2\psi](d\psi)^2$$
$$= 8a^2[1+\cos 2\psi](d\psi)^2$$
$$= 16a^2 \cos^2\psi \,(d\psi)^2$$
$$\therefore ds = 4a\cos\psi \, d\psi$$
$$\therefore s = 4a\int \cos\psi \, d\psi = 4a\sin\psi + c$$

وبقياس البعد لقوس s من الرأس O فإن $s = 0$ عندما $\psi = 0$

$\therefore$ ثابت = صفر

$$\therefore \boxed{s = 4a\sin\psi}$$

لاحظ أن:

1. طول القوس $OB = 4a$
2. $\rho = \frac{ds}{d\psi} = 4a\cos\psi$ (+ve always = even power)
3. تعرف ρ بنصف قطر التقوس
4. عند النهاية B تكون $\psi = 90^\circ$

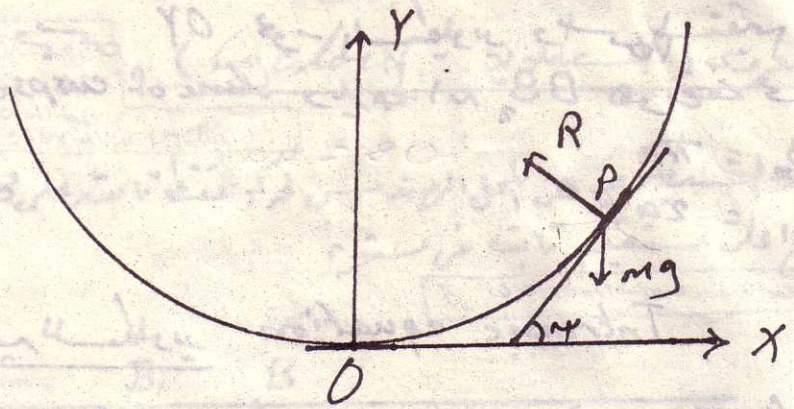
at O, $\psi = 0 \Rightarrow c = 4a$

at B, $\psi = \pi/2 \Rightarrow c = 0$

Motion on the inner body of the surface.

مثال ١

تتحرك نقطة مادية على سطح صقيل على شكل سيكلويد أملس مقلوب بحيث يكون محوره رأسيا ورأسه إلى أسفل. فإذا قذفت النقطة على السطح من الداخل من رأس السيكلويد بسرعة V_0، ادرس الحركة.



I, II, III : what we mean by studying motion

I تعيين الموضع :

نفرض أن P موضع النقطة المتحركة عند اللحظة t حيث القوس $s = \overset{\frown}{OP}$

II القوى المؤثرة :

(i) mg وزن الجسيم رأسيا الى أسفل

(ii) R رد الفعل العمودي للسلك الى الداخل

III معادلة الحركة :

3 unknowns ψ, S, R

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\psi \qquad (1)$$

$$m\frac{v^2}{s} = R - mg\cos\psi \qquad (2)$$

معادلة السلك هي

$$s = 4a\sin\psi \qquad (3)$$

بحذف (1), (3) نجد أن

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{4a}s \qquad (4)$$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري

$\ddot{s} = \dot{s}\frac{d\dot{s}}{ds}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{4a}}} = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

نكامل المعادلة (4) بالنسبة الى s

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{-gs^2}{8a} + C_1$$

عندما $s = 0$ ، $\frac{ds}{dt} = v = v_0$

$$\therefore C_1 = \frac{1}{2}v_0^2$$

$$v^2 = \frac{-gs^2}{4a} + v_0^2$$

لايجاد سرعة الجسيم عند النقطة (B)، نضع $s = 4a$

$$v_B^2 = -4ag + v_0^2$$

وبالتعويض في المعادلة (3) يمكننا الحصول على رد فعل R

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v_0^2 - \frac{g s^2}{2a}$$

$$\frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{\frac{g}{4a}} \sqrt{\frac{4a}{g} v_0^2 - s^2}$$

حيث أن s تزداد مع الزمن t عند بدء الحركة فإن

$$\therefore \frac{ds}{dt} = + \sqrt{\frac{g}{4a}} \sqrt{\frac{4a}{g} v_0^2 - s^2}$$

$$\int \frac{ds}{\sqrt{\frac{4a}{g} v_0^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{g}{4a}} \int dt$$

$$\sin^{-1} \frac{s}{\sqrt{\frac{4a}{g} v_0^2}} = \sqrt{\frac{g}{4a}}\, t + C_2$$

$$s = 0 \quad \text{at} \quad t = 0 \implies C_2 = 0$$

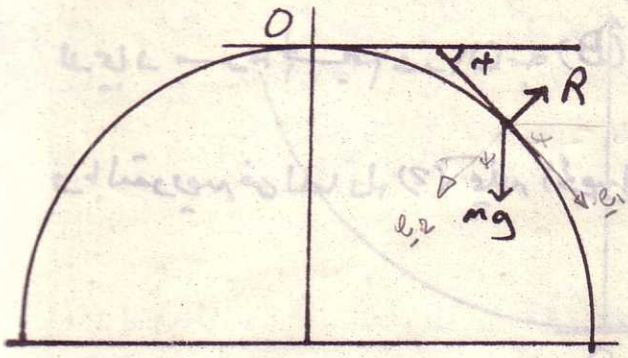
$$\therefore \sin^{-1} \frac{s}{v_0} \sqrt{\frac{g}{4a}} = \sqrt{\frac{g}{4a}}\, t$$

$$s(t) = s = v_0 \sqrt{\frac{4a}{g}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}\, t\right)$$

مثال ٢

تثبت سلكة أملس على شكل سيكلويد ثم تثبت بحيث يكون محوره رأسياً ورأسها الى أعلى ثم وضع جسيم صغير ليتزلق على السلكة من الخارج. فاذا بدأت الحركة من سكون عندما كان الجسيم عند رأس السيكلويد. اثبت ان الجسيم يترك السلكة عندما يكون متحركاً في اتجاه يصنع زاوية $45°$ مع الأفق.

motion on the outer ~~body~~ of the curve



القوى المؤثرة:
(أ) mg وزن الجسيم رأسيا الى أسفل
(ب) R رد فعل السلك عموديا الى خارج

معادلات الحركة:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg\sin\psi \qquad (1)$$

$$m\frac{v^2}{s} = mg\cos\psi - R \qquad (2)$$

$$s = 4a\sin\psi \qquad (3)$$

بالتعويض من (3) في (1) نجد أن

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{g}{4a}s$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{gs^2}{8a} + C_1$$

$$v_0 = 0 \text{ at } s = 0 \implies C_1 = 0$$

$$v^2 = \frac{gs^2}{4a}$$

$$s = \frac{ds}{d\psi} = 4a\cos\psi \qquad \text{من (3)}$$

$$\therefore \frac{mgs^2}{4a.4a\cos\psi} = mg\cos\psi - R$$

$$\therefore R = mg\cos\psi - mg\frac{\sin^2\psi}{\cos\psi}$$

$$= mg\left[\frac{\cos^2\psi - \sin^2\psi}{\cos\psi}\right]$$

الجسيم يبدأ السقوط عندما $R = 0$
أي عندما

$$\cos^2\psi = \sin^2\psi$$

$$\cos\psi = \sin\psi$$

$$\psi = 45^\circ$$

Note: Given a relation between v and s derivate w.r to s to obtain $\dot{s}\frac{ds}{ds} = v\frac{dv}{ds} = F_t e_1$, then in order to obtain a relation between v and t use $F_t e_1 = \frac{dv}{dt} e_1 = \frac{d^2s}{dt^2} e_1$ and then a relation between t and v is available.

مثال ٣

تتحرك نقطة مادية على منحنى بحيث كانت العلاقة بين السرعة v والإزاحة القوسية s تعطى من العلاقة $2as = \ln\frac{b+ac^2}{b+av^2}$. أوجد القوة المماسية التي تؤثر على النقطة المتحركة والزمن الذي يمضي بينما بدأ الحركة حتى تكون السرعة v. ثم استنتج v بدلالة الزمن t

$v = v(t)$

لإيجاد القوة المماسية نوجد أولاً $\ddot{s}$ حيث

$$\frac{d(v^2/2)}{ds} = \dot{s}\frac{d\dot{s}}{ds} = \ddot{s} = \frac{dv}{dt}$$

وحيث أن

$$e^{-2as} = \frac{b+av^2}{b+ac^2} \quad [1]$$

$$\therefore b + av^2 = (b+ac^2)e^{-2as}$$

$$2av\frac{dv}{dt} = (b+ac^2) \times -2a\, e^{-2as}\frac{ds}{dt}$$

$$\therefore \ddot{s} = -(b+ac^2)e^{-2as} \quad \text{from [1]}$$

$$\frac{dv}{dt} = -(b+av^2)$$

لإيجاد العلاقة بين السرعة v والزمن t نبحث عن المعادلة التفاضلية بين $\frac{dv}{dt}$ والسرعة v فتكون المعادلة هي

$$\ddot{s} = -(b+av^2) = \frac{dv}{dt}$$

$$\int\frac{dv}{b+av^2} = \int -dt$$

$$-t + c_1 = \frac{1}{a\sqrt{\frac{b}{a}}}\tan^{-1}\frac{v}{\sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{1}{ah}\tan^{-1}\frac{v}{h} \qquad h = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

لتعيين الثابت عند بدء الحركة

$$s = 0 \qquad 1 = \frac{b+ac^2}{b+av^2} \Longrightarrow v = c$$

اى عند بدء الحركة $v=c$ ، $t=0$ ، $s=0$

$$\therefore c_1 = \frac{1}{\sqrt{ab}} \tan^{-1}\frac{c}{h}$$

$$\therefore t = \frac{1}{\sqrt{ab}}\left[\tan^{-1}\frac{c}{h} - \tan^{-1}\frac{v}{h}\right]$$

$$\therefore v = \frac{h\left[\frac{c}{h} - \tan(\sqrt{ab}\,t)\right]}{1+\frac{c}{h}\tan(\sqrt{ab}\,t)} = v(t)$$

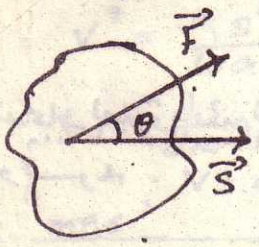
قاعدة الشغل والطاقة: Principle of Work and Energy

١- الشغل:

اذا اثرت قوة فى جسم فازاحة معلومة فانه يقال بانه هذه القوة قد بذلت شغلا ولحساب الشغل الذى تبذله قوة ما يجب مراعاة الحالات الاتية:

أولا: اذا كانت القوة ثابتة اثناء الازاحة:

اذا اثرت قوة ثابتة $\vec{F}$ فى جسم فازاحة ازاحه $\vec{S}$ فان الشغل الذى بذلته القوة فى هذه الحاله



الشغل = القوة المضاله × الازاحه

$$W = F\cos\theta \times s$$
$$= Fs\cos\theta$$

وتكتب هذه النتيجه عادة على الصوره

$$\boxed{W = \vec{F}\cdot\vec{S}}$$

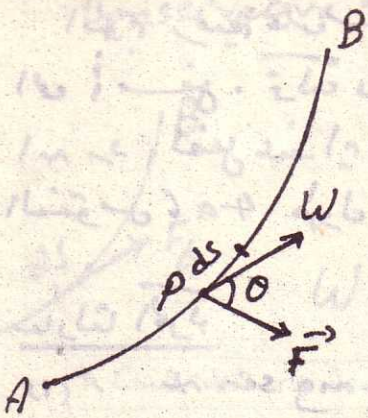
نتيجه ١

اذا كانت $\theta = 0$ اى اذا كانت القوة فى اتجاه الازاحه، فى هذه الحاله $W = Fs$

نتيجه ٢

اذا كانت $\theta = 180^\circ$ اى اذا القوة فى الاتجاه المضاد للازاحه اى ان $W = -Fs$

ثانيا : اذا كانت القوة متغيرة اثناء الازاحة :



نعتبر نقطة مادية تتحرك من مستوى ولتفرض انها ترسم المنحنى AB تحت تأثير قوة متغيرة .
لحساب الشغل المبذول لنقل النقطة من A الى B نعتبر ازاحة صغيرة ds على المنحنى وحساب عنصر الشغل المبذول في هذه الازاحة :

$$\delta W = \vec{F} . d\vec{s}$$

حيث F مقدار القوة عند الموضع P

$$\therefore W = \int_A^B \vec{F} . d\vec{s} = \int_A^B F \cos\theta \, ds$$

وحيث $F\cos\theta = F_t$ = مركبة القوى المؤثرة في اتجاه المماس

$$\therefore \boxed{W = \int_A^B F_t \, ds}$$

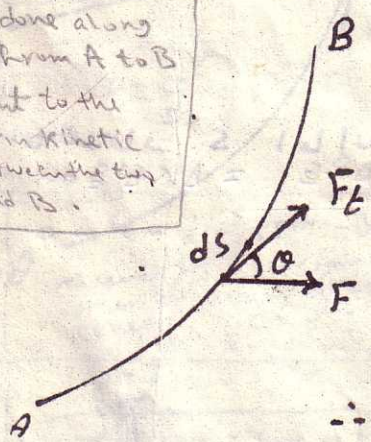
For a moving point on a curve all normal forces, to the tangent to the curve, carry out no work. Normal reaction is an example.

* [اى انه عندما تتحرك نقطة مادية على منحنى فانه يمكن اهمال جميع القوى العمودية عند حساب الشغل (مثل رد الفعل العمودى)]

The Principle of Work and Energy for Plane Motion :

قاعدة الشغل والطاقة للحركة المستوية :

The work done along the curve from A to B is equivalent to the difference in kinetic energy between the two points A and B.



نعتبر نقطة مادية تتحرك حركة مستوية فترسم المنحنى AB

$$W = \int_A^B F_t \, ds$$

$$F_t = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$ Go To *

$$\therefore W = \int_A^B m \frac{d^2 s}{dt^2} ds = \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right]_A^B$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d(ds/dt)}{dt} =$$

$$= \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$\frac{d(ds/dt)}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} =$$

$$\dot{s} \cdot \frac{d\dot{s}}{ds}$$

اى أن الشغل المبذول يساوى التغير فى طاقة الحركة

= طاقة الحركة النهائية - طاقة الحركة الابتدائية

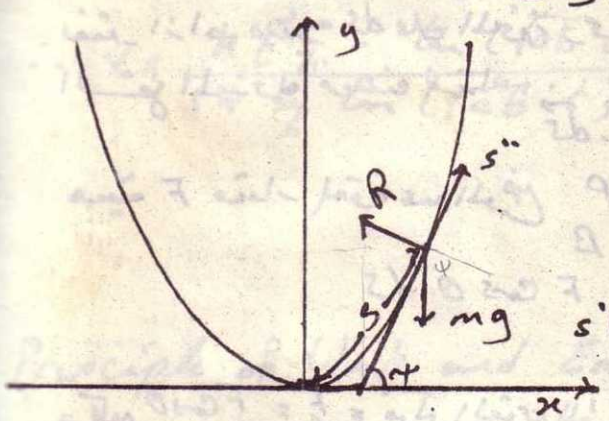
$$\rho = \left[1 + (D_x y)^2\right]^{3/2} / D_x^2 y$$

Note: given a relation between y and x $\Rightarrow$ we get a relation between ψ and x, y from $\frac{dy}{dx} = \tan\psi \Rightarrow$ $\cos\psi$ is found from $\tan\psi$, $\dot{s}^2 = v^2$ is found using $\Delta K.E = \Delta P.E$.

مثال ٤

انبوبة رفيعة على شكل قطع مكافئ موضوعة في مستوى رأسي ورأسه لأسفل. تركت نقطة مادية على ارتفاع l لتنزلق على سطحه الداخلي. اثبت انه رد الفعل عند أي وضع يساوي $\frac{2mg(a+l)}{s}$ حيث s نصف قطر انحناء القطع عند هذا الوضع، $4a$ طول الوتر البؤري للقطع.

$y^2 = 4ax$
$(x,y) = (4at^2, 2at)$;
or $x^2 = 4ay$
$(x,y) = (2at, 4at^2)$



معادلتا الحركة

$$m\ddot{s} = -mg\sin\psi \quad (1)$$

$$m\frac{\dot{s}^2}{s} = R - mg\cos\psi \quad (2)$$

ولايجاد R يجب تعيين الزاوية ψ وهي أن

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4a} = \frac{x}{2a}$$

حيث انه معادل المحنى هي

$$x^2 = 4ay$$

$\cos^2\psi = 1 + \tan^2\psi$; $\tan^2\psi = \frac{x^2}{4a^2}$

$\cos^2\psi = \frac{1}{1 + x^2/4a^2} = \frac{4a^2}{4a^2 + x^2} \Rightarrow$

$\cos\psi = \frac{2a}{\sqrt{x^2+4a^2}} \therefore \cos\psi = \frac{2a}{\sqrt{x^2+4a^2}} = \frac{a}{\sqrt{ay+a^2}}$

$\frac{1}{\sin^2\psi} = (1 + \cot^2\psi)$

$\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{1+a/y}}$

$\cos\psi \frac{d\psi}{ds} = \frac{d}{ds}(1+a/y)^{-1/2}$
$= +\frac{1}{2}(1+a/y)^{-3/2} \times -ay^{-2} \frac{dy/ds}{2ay^2(1+a/y)^{3/2}}$

$$\rho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left(1 + \frac{x^2}{4a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2a}} = 2a\left(1 + \frac{y}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$$

اما لايجاد $\dot{s}^2$ انه نظرا لعدم وجود احتكاك $\Delta P.E = \Delta K.E = +w$ ، $(l > y)$

initial energy = Potential energy (Kinetic + Potential) transient energy

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + mgy = mgl$$

$$mgl - mgy = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - 0$$

Change in Potential energy = Change in Kinetic energy

$-\int mg\,dy$
$\int mg\underline{j}\cdot dy\,\underline{j}$
$-\int mg\,dy =$
$-mg(y-l) =$
$mg(l-y) = W$

$$\therefore R = mg\frac{a}{\sqrt{ay+a^2}} + \frac{2m\{lg - yg\}}{2a(1+\frac{y}{a})^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2a(1+\frac{y}{a}) + 2l - 2y}{2a(1+\frac{y}{a})^{\frac{3}{2}}}\, mg$$

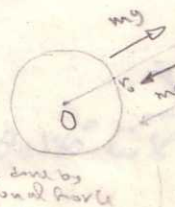
$$= 2mg\,\frac{(a+l)}{s}$$

l and y are vertical

$\Delta K.E = E_{K_{fi}} - E_{K_{in}} = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = +w$
v is real $\Rightarrow (v^2 = +w)$

$\Delta P.E = E_{P_{fi}} - E_{P_{in}} = -mgy - (-mgl) =$
$mgl - mgy$

$l > y \Rightarrow \Delta P.E = +w$

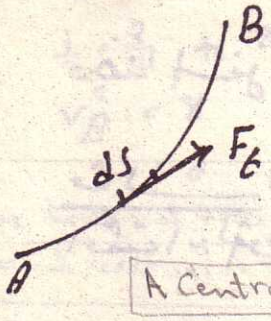


* the work done by gravitational force from r_0 to r is $-mg\,\underline{e}_r \cdot y\,\underline{e}_r = -mgy$.

* Work from r to r_0 is $W_{gr} = -mg\,\underline{e}_r \cdot -y\,\underline{e}_r = +mgy$

an external agent raises the body of mass m from r_0 to $r \Rightarrow$ Work done by this agent against the gravitational force is $mgy = mg\,\underline{e}_r \cdot y\,\underline{e}_r$ agent

Conservative Fields of Force — المجالات المحافظة



لقد اثبتنا ان الشغل المبذول لتحريك نقطة مادية من مستوى من A الى B يمثل ه

$$W = \int_A^B F_t \, ds$$

Conservative force field ≡ Independent of the path taken from A to B

A Central force field is Conservative force field.

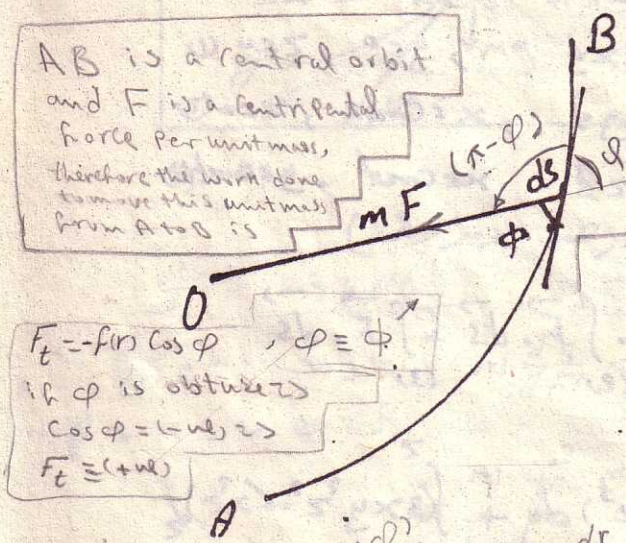
وفي الغالب نتوقف فيه هذا التعامل اى فيه الشغل المبذول على المسار الذى تتخذه النقطة فى حركتها من A الى B

اما اذا كانت فيه الشغل المبذول فى الحركة من A الى B لا يتوقف على المسار الذى تتخذه فى هذه الحالة تسمى القوى المؤثرة بالقوى المحافظة.

كما يسمى المجال الذى تنشأ عنه هذه القوى بالمجال المحافظ.

فمثلا المجال الجاذبى والمجال المغناطيسى والمجال الكهربائى الاستاتيكى مجالات محافظة وعلى ذلك يمكننا اثبات ان الحركة تحت تأثير قوة مركزية جاذبة هى حركة فى مجال محافظ.

مثلا اذا كان AB مسار مركزى ولتكن المركز جاذبة هى F لوحدة الكتل فان الشغل المبذول لتحريك نقطة مادية كتلتها m من A الى B

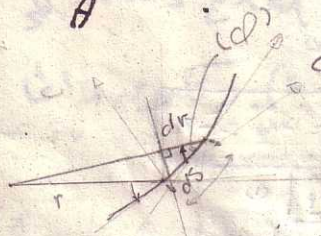


$$W = \int_A^B F_t \, ds$$

using intrinsic C.S ⇒

$$E(r) \cdot ds \hat{s} = F(r)\, ds \cos(\pi-\phi) = -F(r)\, ds \cos\phi$$

$$= -\int_A^B m F \cos\phi \, ds$$

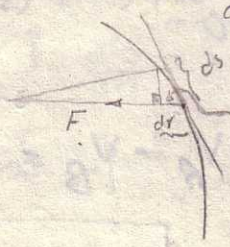


$$-1 \leq \cos\phi = \frac{dr}{ds} \leq 1$$

وكذلك $F = f(r)$

$$W = -m \int_A^B f(r) \frac{dr}{ds} \, ds$$

$$= -m \int_{A\equiv r_1}^{B\equiv r_2} f(r)\, dr$$



$F_t = f(r)\cos(\pi-\phi)$

$\cos(\pi-\phi) = \frac{dr}{ds} = -\cos\phi$

مثلا من الحركة تحت تأثير قانون التربيع العكسى

$$F = \frac{\mu}{r^2}$$

$$\therefore W = -m\int_{r_1}^{r_2} \frac{M}{r^2}\,dr = MM\left[\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = MM\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right]$$

وهذا الشغل لا يتوقف على المسار من A إلى B

مثال ٥ :

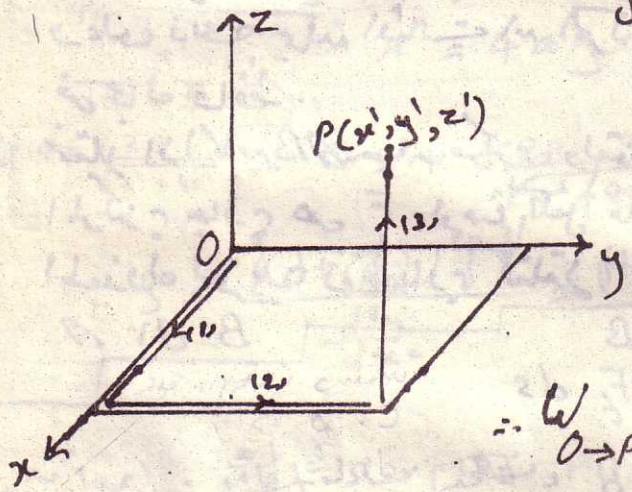
اثبت ان القوة $\vec{F} = (y^2z^3 - 6xz^2)\,\hat{i} + (2xyz^3)\,\hat{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\,\hat{k}$ محافظة ثم اوجد دالة الوضع عندما نقطة ومن ذلك اوجد الشغل من النقطة (او 0) $\equiv O$ الى النقطة $B \equiv (1, 2, 1)$ واذا كانت سرعة وحدة الكتل عند A هي $\sqrt{\frac{3}{2}}$ فاوجد سرعتها عند النقطة B

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$\text{curl } \vec{F} = 0$ لاثبات ان القوة محافظة ، نثبت ان

1 St

2 nd لايجاد الشغل نتأمل على المسار المبين بالشكل



$$\vec{ds} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$$

$\vec{ds} = dx\,\hat{i}$, $y = 0$, $z = 0$ (1)

$\vec{ds} = dy\,\hat{j}$, $x = \text{Const.}$, $z = 0$ (2)

$\vec{ds} = dz\,\hat{k}$, $x = \text{Const}$, $y = \text{Const}$ (3)

$$\therefore W_{O\to P} = \int_{(1)} \vec{F}\cdot\vec{ds} + \int_{(2)} \vec{F}\cdot\vec{ds} + \int_{(3)} \vec{F}\cdot\vec{ds}$$

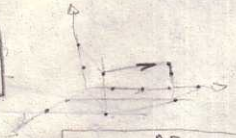
$$= \int_0^x (y^2z^3 - 6xz^2)\,dx + \int_0^y (2xyz^3)\,dy + \int_0^z (3xy^2z^2 - 6x^2z)\,dz$$

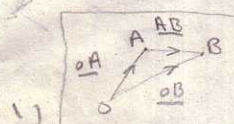
$$= \frac{3xy^2z^3}{3} - \frac{6x^2z^2}{2}$$

$$V_P = W_{P\to O} = 3x^2z^2 - xy^2z^3$$

$$-W_{\underline{OP}}^{c.a} = W_{\underline{OP}}^{\vec{F}} = -W_{\underline{PO}}^{\vec{F}} = W_{\underline{PO}}^{c.a} = -V_P$$

$$V_P = W_{\underline{OP}}^{c.a} \quad (1)$$





$A = (1, 1, 1)$; $B = (1, 2, 1)$

$$W_{OB} = W_{OA} + W_{AB} \Rightarrow$$

$$W_{AB} = W_{OB} - W_{OA} =$$

$$-V_B + V_A =$$

$$V_A - V_B \quad (2)$$

$$W_{A\to B} = V_A - V_B = 2 - \left(\frac{3}{4} - 2\right) = 1\frac{3}{4} \qquad (3-1=)$$

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{m} \Big|_{\substack{\text{i.e. agent} \\ \text{without acceleration}}}$$

3rd حيث ان المجال محافظ يمكن استعمال قانون حفظ الطاقة

$$\frac{1}{2}m V_A^2 + V_A = \frac{1}{2}m V_B^2 + V_B$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}V_B^2 - \frac{5}{4}$$

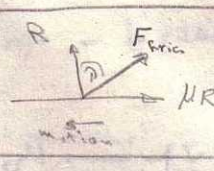
$$V_B^2 = 8 \Longrightarrow V_B = 2\sqrt{2}$$

$$\Delta E_K = \Delta E_P \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = -V_B - (-V_A) = V_A - V_B$$

$$\frac{1}{2}m v_B^2 = \frac{1}{2}m v_A^2 + V_A - V_B \quad , \boxed{m=1} \text{ unit}$$

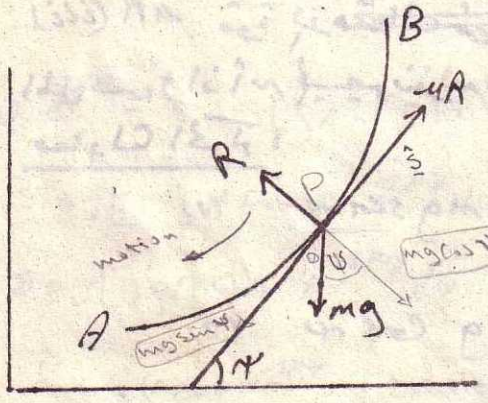
$$\frac{\text{Max. frictional force}}{\text{normal reaction of the surface}} = \mu = \text{const.}$$



$$\tan\psi = \frac{\mu R}{R} = \mu$$

حركة نقطة مادية على منحنى مستوى : The motion of a point particle on a rough plane curve:

ينزلق جسيم على سلك مستوى . اوجد السرعة التي يكتسبها الجسيم عند اى لحظة



I تعيين الموضع : Position(P) at any instant (t)

نفرض ان AB هو السلك المعلوم وان موضع الجسيم عند اللحظة t حيث المقوس $\overset{\frown}{AP} = s$

II القوى المؤثرة على الجسيم : the forces acting on the Particle

(i) mg وزن الجسيم رأسيا الى أسفل

(ii) R رد الفعل العمودى للسلك

(iii) μR الاحتكاك فى اتجاه المماس الى اعلى (ضد الانزلاق)

III معادلتا الحركة : The equations of motion

$\frac{d^2s}{dt^2}\hat{s} \parallel \dot{s} \parallel \mu R\,\hat{s}$

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = \mu R - mg\sin\psi \quad (1) \rightarrow \text{tangential direction}$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = R - mg\cos\psi \quad (2) \rightarrow \text{normal}$$

$\frac{1}{\mu}\left[m\frac{d^2s}{dt^2} + mg\sin\psi\right] = 0$

$m\frac{v^2}{\rho} + mg\cos\psi = R$

العلاقة الثالثة المطلوبة هى المعادلة الذاتية للمنحنى (السلك) وتكون دائما على الصورة $(v = ds/dt = \dot{s})$

$$s = f(\psi) \quad (3)$$

$$\rho = f'(\psi) = \frac{ds}{d\psi}$$

بحذف R بين (1) ، (2) نجد أن

$$m\frac{d^2s}{dt^2} - \mu m\frac{v^2}{\rho} = mg\{\mu\cos\psi - \sin\psi\}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \dot{s}\cdot\frac{d\dot{s}}{ds} = \frac{d\frac{1}{2}\dot{s}^2}{ds}$$

$$\frac{d\frac{1}{2}v^2}{ds} - \mu v^2\frac{d\psi}{ds} = g\{\mu\cos\psi - \sin\psi\}$$

Since $d\psi/ds = 1/(ds/d\psi) = 1/f'(\psi)$

$$\frac{d(v^2)}{d\psi} - 2\mu v^2 = 2g f'(\psi)\{\mu\cos\psi - \sin\psi\}$$

here we differentiate w.r.to $(\dot{s} = v)$ $\Rightarrow d\frac{1}{2}\dot{s}^2 = \frac{1}{2}\times 2\,\dot{s}\,d\dot{s}$

وهى معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى فى

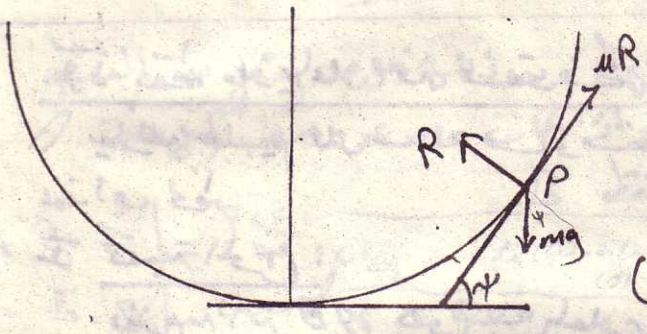
$$\frac{dv^2}{ds}\cdot\frac{ds}{d\psi} - 2\mu v^2 = \frac{ds}{d\psi}$$

$$\boxed{\left(\frac{dv^2}{d\psi} - 2\mu v^2\right) = \left(2g f'(\psi)\left[\mu\cos\psi - \sin\psi\right]\right)}$$

مثال ٦ :

ينزلق جسيم على سلك ناعم على شكل الدويري $s = 4a \sin\psi$ مثبت بحيث كانه محوره رأسيا ورأسه الى أسفل. فاذا تحرك الجسيم من السكون عند نهاية الدويري. اوجد السرعة التي يكتسبها عندما يصل الى رأس الدويري.

نفرض ان P موضع الجسيم عند اللحظة t حيث $\widehat{OP} = s$



القوى المؤثرة :

(i) mg رأسيا الى أسفل

(ii) R رد فعل السلك العمودي

(iii) μR قوة إحتكاك في اتجاه المماس (اذ أن الجسيم ينزلق الى أسفل)

معادلة الحركة :

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = \mu R - mg\sin\psi \quad (1)$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = R - mg\cos\psi \quad (2)$$

$$s = 4a\sin\psi$$

بحذف R بين (1) و (2) نجد أن

$\rho = \frac{ds}{d\psi} \Rightarrow$ $$m\frac{d^2s}{dt^2} - \mu m\frac{v^2}{\rho} = mg\{\mu\cos\psi - \sin\psi\}$$

$\frac{1}{\rho} \times$ $$\left[\frac{d(\frac{1}{2}v^2)}{ds} - \mu\frac{v^2}{\rho} = g\{\mu\cos\psi - \sin\psi\}\right]$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d(v^2)}{d\psi} - 2\mu\frac{v^2}{\rho} = 2g\{\mu\cos\psi - \sin\psi\}$$

$$\frac{d(v^2)}{d\psi} - 2\mu v^2 = 2g\rho\{\mu\cos\psi - \sin\psi\}$$

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = 4a\cos\psi \quad \text{حيث}$$

$$\frac{d(v^2)}{d\psi} - 2\mu v^2 = 8ag\{\mu\cos^2\psi - \sin\psi\cos\psi\}$$

$$\frac{d}{d\psi}\left\{v^2 e^{-2\mu\psi}\right\} = 2ag\, e^{-2\mu\psi}\left\{\mu\cos^2\psi - \tfrac{1}{2}\sin 2\psi\right\}$$

$$\therefore v^2 e^{-2\mu\psi} = 2ag\left[\int \mu(\cos 2\psi + 1)e^{-2\mu\psi}\,d\psi - \tfrac{1}{2}\int \sin 2\psi\, e^{-2\mu\psi}\,d\psi\right] =$$

$$2ag\left[\int \mu\cos 2\psi\, e^{-2\mu\psi}\,d\psi + \tfrac{1}{2}\int \mu e^{-2\mu\psi}\,d\psi - \tfrac{1}{2}\int \sin 2\psi\, e^{-2\mu\psi}\,d\psi\right] + C$$

$$2ag\left[\frac{1}{2}\int \cos 2\psi \cdot \mu e^{-2\mu\psi}\,d\psi \quad \boxed{-\frac{1}{2}e^{-2\mu\psi}} \quad -\frac{1}{2\mu}\int \sin 2\psi\, \mu e^{-2\mu\psi}\,d\psi\right] + C$$

$$-\frac{1}{2}\left(\cos 2\psi \cdot e^{-2\mu\psi} + \int 2\sin 2\psi \cdot e^{-2\mu\psi}\,d\psi\right)$$

$$+\frac{1}{\mu}\int \sin 2\psi \cdot -2\mu e^{-2\mu\psi}\,d\psi\Big)$$

$$-\frac{1}{\mu}\left[e^{-2\mu\psi}\cdot\sin 2\psi - \int 2\cos 2\psi\, e^{-2\mu\psi}\,d\psi\right]$$

$$-\frac{1}{2}\cos 2\psi \cdot e^{-2\mu\psi} + \frac{1}{2\mu}\cdot e^{-2\mu\psi}\sin 2\psi - \frac{1}{\mu}\int \cos 2\psi\, e^{-2\mu\psi}\,d\psi = \int \cos 2\psi\, e^{-2\mu\psi}\,d\psi$$

$$= \left(\frac{\mu+1}{\mu}\right)\int \cos 2\psi\, e^{-2\mu\psi}\,d\psi$$

$$\frac{dv^2}{d\psi} - 2\mu v^2 = 2g f'(\psi)[\mu\cos\psi - \sin\psi] \quad \left(\times\, e^{-2\mu\psi}\right) \Rightarrow$$

$$e^{-2\mu\psi} D_\psi v^2 - 2\mu v^2 e^{-2\mu\psi} = 2g e^{-2\mu\psi} f'(\psi)[\mu\cos\psi - \sin\psi]$$

$$\Rightarrow D_\psi\left(v^2 e^{-2\mu\psi}\right) = 2g e^{-2\mu\psi} f'(\psi)[\mu\cos\psi - \sin\psi].$$

* $\int e^{ax}\sin nx\,dx = \left[e^{ax}(a\sin nx - n\cos nx)/(a^2+n^2)\right] + C$

* $\int e^{ax}\cos nx\,dx = \left[e^{ax}(a\cos nx + n\sin nx)/(a^2+n^2)\right] + C$

تمارين على الباب الثاني

Exp. 20

١ انبوبة ملساء دائرية المقطع تنبت على شكل سيكلويد $s = 4a\sin\theta$ وتثبت بحيث كاسه رأسي الى أسفل ومحوره رأسيا. قذف جسيم صغير داخل الانبوبة أفقيا من رأس السيكلويد بسرعة $\sqrt{4ag}$ فوجد ان الجسيم يصل عند قوة الانبوبة (نابة السيكلويد) بسرعة $\sqrt{5ag}$.

٢ سلك على شكل المنحنى $y = \sin x$ وضع في مستوى رأسي وينزلق عليه حلقة كتلتها m. فاذا علم ان بداية الحركة من السكون من النقطة $(x, \frac{\pi}{4})$. اثبت ان الضغط الواقع على السلك عند ما تمر الحلقة بالنقطتين $(0,0)$، $(-1, -\frac{\pi}{2})$ هما على الترتيب $mg(3+\sqrt{2})$ ، $\frac{mg}{\sqrt{2}}$.

٣ تتحرك نقطة مادية على المنحنى $x^2 = 4ay$. اثبت ان الضغط على المنحنى يكافئ $\frac{m}{a}(v_0^2 - 2ag)$ حيث a نصف قطر التقوس، v_0 السرعة عند النقطة $(0,0)$.

٤ تنزلق نقطة مادية من السكون من اعلى نقطة في دائرة رأسية نصف قطرها a. أوجد اين تترك الدائرة. ثم اثبت ان ترسم بعد ذلك قطع حلقي مكافئ رأسه البؤري $\frac{16a}{27}$ (الصورة) وان تصدم المستوى الافقي الذي تقع عليه الدائرة عند نقطة تبعد عن نقطة التماس بمقدار $\frac{5(\sqrt{5}+4\sqrt{2})}{27}a$.

٥ تنزلق نقطة مادية على المنحنى $y = a\sin\frac{x}{a}$ حيث محور السينات افقي ولصادي رأسي فاذا بدأت الحركة من السكون من النقطة التي يكون المماس عندها مائلا على الافق بزاوية α. اثبت ان تترك المنحنى عندما تقطع مسافة رأسية قدرها $a\sec\alpha$.

٦ نقطة تتحرك على منحنى وكانت مجتذبة في اتجاه المماس تساوي مجتذبة في الاتجاه العمودي على المماس وكان المماس يدور بسرعة زاوية ω. اوجد معادلة المسار.

٧ تتحرك نقطة مادية على المنحنى $y = a\cosh\frac{x}{a}$ تحت تأثير قوة تقع في الاتجاه الموازي الى محور الصادات وتتناسب تناسبا طرديا مع البعد عن محور السينات. اثبت أن الحركة توافقية بسيطة. ثم اوجد زمن الفعل عندما تقطع

٨ تتحرك نقطة مادية من سكون أسفل سيكلويد أملس محوره رأسي ورأسه إلى أسفل. أوجد سرعة النقطة ورد الفعل عليه عند أي موضع واثبت أن الزمن الذي تأخذه في قطع النصف الأول من المسافة الرأسية يساوي الزمن الذي تأخذه في قطع النصف الثاني.

٩ قذفت نقطة مادية بسرعة $\sqrt{8ag}$ من نهاية سيكلويد محوره رأسي ورأسه إلى أسفل وعندما وصلت إلى الرأس التصقت بنقطة مادية أخرى مساوية لها في الكتلة وموضوعة ساكنة عند الرأس بحيث كونتا جسما واحدا. أوجد سرعة هذا الجسم بعد التصادم ثم أوجد أقصى مسافة يصعدها الجسم الجديد حتى يسكن لحظيا.

May 90

١٠ قذفت نقطة مادية بالسرعة V_0 من أعلى نقطة لدويري أملس محوره رأسي ورأسه إلى أسفل في اتجاه المماس لهذا المنحنى. اثبت أن الزمن اللازم لكي تصل منه هذه النقطة إلى رأس السيكلويد هو $2\sqrt{\frac{a}{g}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{4ag}}{V_0}$ حيث a نصف قطر الدائرة الرامية.

١١ تنزلق حلقة صغيرة ملساء كتلتها m على سلك أفقي أملس. وصلت الحلقة بنقطة مادية كتلتها $2m$ بخيط عديم المرونة طوله a فإذا بدأت الحلقة حركتها من السكون بسرعة أفقية $V_0=\sqrt{3ag}$ والخيط رأسي إلى أسفل. اثبت أن $a\dot{\theta}^2(1+2\sin^2\theta)=3g(2\cos\theta-1)$ حيث θ هي الزاوية التي يصنعها الخيط مع الرأسي من أي وضع. اثبت أيضا أن الخيط يتذبذب بزاوية $\frac{\pi}{3}$ على جانبي الرأسي. واثبت أن خلال التذبذب الكامل تتحرك الحلقة مسافة $T\sqrt{\frac{ag}{3}}$ حيث T هو الزمن الدوري.

١٢ تنزلق حلقة صغيرة ملساء على سلك أملس على شكل سيكلويدين أملسين ومتماثلين من القاعدة الأفقية ولنابيين واحدا رأسه إلى أعلى والآخر رأسه إلى أسفل ومستوى السلك رأسي. إذا ابتدأت الحلقة حركتها من أعلى نقطة بسرعة أفقية $V_0=\sqrt{4ag}$. أوجد الزمن الذي تستغرقه من حركتها حتى تصل إلى أسفل نقطة.

since $\omega \Rightarrow V$ [1] hence $I \Rightarrow m$? Therefore, $\neg I \Rightarrow m$)

or $(\neg\omega \Rightarrow V) \equiv$ linear motion and here (Conversely)

To Sum [1] (Rotational motion) $\equiv (\omega \Rightarrow V)$

or [2] (linear motion) $\equiv \neg\omega \Rightarrow V$

[1] $\Rightarrow (I \Rightarrow m)$ ①

[2] $\Rightarrow (\neg I \Rightarrow m)$ ②

Since I is defined in terms of m therefore if I vanish or doesn't exist i.e. $\neg I$ must be equivalent to $I_s = 0$

$\Rightarrow \neg I \Rightarrow m$ [3]

which means that $\neg I \Rightarrow m$ is incorrect and instead $I \Rightarrow m$

$\vec{p} = m\vec{s}$ is a measure that describes that there is a mass (m) at a distance (S) from a fixed point O in space $\Rightarrow$ when (m) moves (ΔS) in a time $\Delta t \Rightarrow \vec{p} + \Delta\vec{p} - \vec{p} = m(\vec{s} + \Delta\vec{s} - \vec{s})$

$\Rightarrow d\vec{p}/dt = m\, d\vec{s}/dt$ as $\Delta t \to 0$

$\Rightarrow \vec{p} = m\vec{v}$

$\Rightarrow d\vec{p}/dt = m\, d\vec{v}/dt = m\vec{a} =$ momentum, hence the name "the quantity of motion" for it was found as a result of the motion of (m) i.e. there is three factor that entered implicitly (i) Space (ii) matter (iii) time (i) $\Rightarrow (S)$ (ii) $\Rightarrow (m)$ (iii) $\Leftrightarrow$ motion $\Rightarrow (\Delta t)$ i.e. there is 3 quantities involved in the description of the Process Motion. For this reason momentum $m\vec{v}$ was the 1st candidate to be named the quantity of motion for it contains all of them

الباب الثالث

الحركة المستوية للجسم الجاسئ

١- الجسم الجاسئ : Rigid Body

الجسم الجاسئ هو وهم الفيزيائيين هو مجموعة من النقط المادية التي ترتبط ببعضها البعض بواسطة الجذب المتبادل بينهما بحيث تظل المسافة بينهما ثابتة مهما كانت القوى الخارجية المؤثرة على الجسم ومهما اختلفت أوضاع الجسم.

من الواضح أنه لوضع الجسم الجاسئ في الفراغ يتعين تماما إذا علمت ثلاث نقط غير واقعة على استقامة واحدة. ولكن لتعيين النقط الثلاث يلزم تسع احداثيات مثل

Consider "string theory" in "9 spatial dimensions" and "one of time"

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$$

$$\vec{r}_1 \qquad \vec{r}_2 \qquad \vec{r}_3$$

ولكن هذه الاحداثيات التسع يجب أن تحقق الشروط الثلاث

i) $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \text{const.} = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2$

ii) $(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + \text{----} = \text{const.} = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_3\|^2$

iii) $(x_3 - x_1)^2 + \text{---} \text{---} = \text{const.} = \|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^2$

إذن الجسم الجاسئ يتعين بست احداثيات مستقلة أي أن independent

للجسم الجاسئ ست درجات انطلاق Six Degree of Freedom.

وهذه الاحداثيات التي تأخذ في الغالب على الأقل $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ احداثيات مركز الثقل، (θ, ϕ, ψ) زاويا أويلر (Euler angles) وهي لتقدير اتجاهات أبعاد الجسم المختلفة بالنسبة الى مركز ثقله.

وبذلك يمكن تحليل حركة الجسم الجاسئ من الفراغ الى ثلاث درجات انتقالية translational بحتة وثلاث درجات دورانية بحتة. rotational

٢- الحركة المستوية للجسم الجاسئ :

الجسم الجاسئ يتحرك حركة مستوية اذا كانت جميع نقطه او مجموعات من نقط تتحرك في مستويات متوازية فتكون عندما تتدحرج اسطوانة أو كرة أسفل مستوى مائل او عندما يدور جسم حول محور ثابت [وتتضمن الحركة المستوية للجسم الجاسئ ثلاث درجات انطلاق اثنان منها انتقالية في مستوى الحركة (او متوازية لمستوى الحركة) والأخرى دورانية حول محور عمودي على مستوى الحركة.]

Fixed point

$\square = m\underline{S}$, $\underline{S}$ = (distance from a fixed point); momentum $= m\underline{V} = m\frac{d\underline{S}}{dt}$ ⇒ to saying that we want to describe the state of the mass (m) when it moves $d\underline{S}$ in dt

Inertia is introduced as an inherent property of mass that describes its resistance to a change of its state of uniform motion in a straight line.

- ov -

(m) is a measure of the quantity of matter that a body contains

مثال ١

يدور جسم جاسئ بسرعة زاوية ω حول محور ثابت . احسب طاقة حركة هذا الجسم وكذلك كمية حركة الدورانية حول هذا المحور .

dynamics of rotation about O = relation between forces on a rigid body and its angular acceleration

(1)

نفترض قطعة في الجسم تدور على محور الدوران ونفرض انها تقابل هذا المحور في O كما في الشكل.

نفرض أن P احدى نقط الجسم وانها كتلتها m وأن $OP = r$

$\therefore$ سرعة النقطة $P = \omega r$ عموديا على OP

$\therefore$ طاقة حركة النقطة $P = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 = \frac{1}{2}m\underline{V}\cdot\underline{V} =$

$\frac{1}{2}m(\underline{\omega}\times\underline{r})\cdot(\underline{\omega}\times\underline{r})$

$W = \int F_{\parallel}\, ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_{\parallel}\, r\, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma\, d\theta$; $\Gamma = \alpha I = I\ddot{\theta}\cdot\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$

Γ = moment of the resultant force about O

$\omega \times r = V$

Kinetic energy for the mass Point (P)

$\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}m\underline{V}\cdot\underline{V} = \frac{1}{2}m(\underline{\omega}\times\underline{r})\cdot(\underline{\omega}\times\underline{r})$

$\therefore$ طاقة حركة الجسم بأكمله $E = \frac{1}{2}\sum m\omega^2 r^2$

$\frac{1}{2}\omega^2\sum mr^2 = E$

ويوضع

$I = \sum mr^2$

$\therefore E = \frac{1}{2}\omega^2 I = \frac{1}{2}mV^2$

$\Gamma = I\frac{d\omega}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt}$ (Γ = resultant external torque)

inert/ɪ'nɜːt/ Lacking the power or will to move

inertia/ɪ'nɜːʃə/ the force which makes a person or thing stay in the state or position which they are in.

$m_i r_i$ = inertia

Moment of inertia = $m_i r_i \times r_i$

$\Gamma = \alpha I \Rightarrow \Gamma/\alpha = I$

α = angular acceleration

$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i \times r_i$

Moment of Inertia

والتعبير $I = \sum mr^2$ يسمى بعزم القصور الذاتي للجسم

$I = \sum_{i=1}^{n} m_i \underline{r}_i \cdot \underline{r}_i$ (verify it)

what is the physical significance of I & h

more clearly the Phy. Signi. of momentum and inertia

(2) لإيجاد كمية حركة الجسم

من الواضح انه كمية حركة النقطة P = mωr في الاتجاه العمودي على OP

$\therefore$ كمية الحركة الزاوية للنقطة P حول المحور = عزم كمية الحركة حول O = $mwr \times r$

Moment of momentum about O = mwr^2 =

$mwr\,\underline{e}_\theta = m\underline{V}$ ⇒

$\underline{r}\times m\underline{V} = mr^2\underline{\omega}$; $\omega = \omega$

$\underline{\omega}\perp(\underline{V}\perp\underline{r})$

angular momentum for Point(P) about the axis

كمية الحركة الزاوية للجسم بأكمله h_O

angular momentum = $h_O = \sum mwr^2 = \omega\sum mr^2$

for the whole body

$h_O = \omega I$

linear momentum = mV

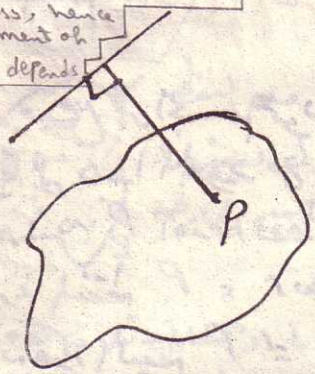
w * r = v

remember

$\frac{d\,r^2\dot{\theta}}{dt} = 0 \Rightarrow r^2\dot{\theta} = h = \text{const.}$

Moment of Inertia — ٤- عزم القصور الذاتي لجسم حول محور :

* Can be enterpreted to state that the inertia of a Point Particle is $(m_i r_i)$ i.e. it depends on its Position r_i and m_i its mass, hence I (moment of inertia) depends on (r_i)



تعريف :

عزم القصور الذاتي لجسم جاسئ حول محور ما يعرف بالصورة الآتية :
نفرض أن P اي نقطة في الجسم ونفرض أن r البعد العمودي للنقطة P عن المحور وان m هي كتلة هذه النقطة . فان عزم القصور الذاتي للجسم حول المحور هو

$$I = \sum mr^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i \cdot r_i \quad \text{(Verify it)}$$

حيث الجمع Σ هنا يمر على جميع نقط الجسم

ويلاحظ :

① عزم القصور الذاتي يكون دائما كمية موجبة
② يعتمد دائما وفي قيمة عزم القصور الذاتي على الصورة الآتية

$$I = \sum mr^2 = ML^2$$

M is the total mass of the body at its Center of mass

حيث $M = \sum m$ = الكتلة الكلية للجسم
، L = تسمى بنصف قطر القصور الذاتي

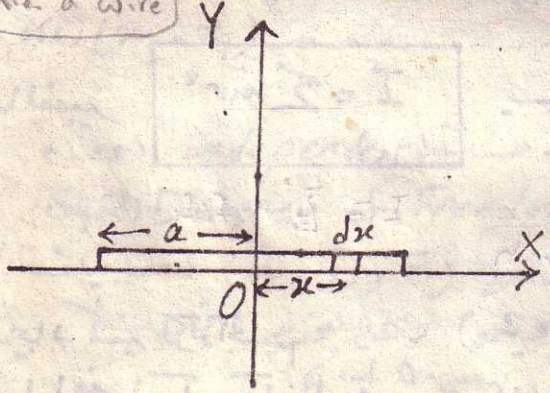
L = radius of inertia or gyration

③ لاحظ ان عزم القصور الذاتي كمية قياسية مجمعية [Additive]

٤- عزم القصور الذاتي لبعض الأجسام :

for a rigid rod i.e. a wire

(أ) عزم القصور الذاتي لقضيب رفيع منتظم حول محور عمودي عليه



أولا : اذا كان المحور مارا بمنتصف القضيب
نفرض أن طول القضيب $2a$ وان كتلته m
$\therefore$ كتلة وحدة الأطوال منه $\rho = \frac{m}{2a}$ $\frac{gm}{cm}$

نأخذ عنصرا صغيرا على طول القضيب dx ونفرض
انه على بعد x من منتصف القضيب O
كتلة العنصر $\Delta m = \rho\, dx$

$$\Delta I_{Oy} = (\rho\, dx)\, x^2$$

$$I_{Oy} = \rho \int_{-a}^{a} x^2\, dx = 2\rho \int_{0}^{a} x^2\, dx$$

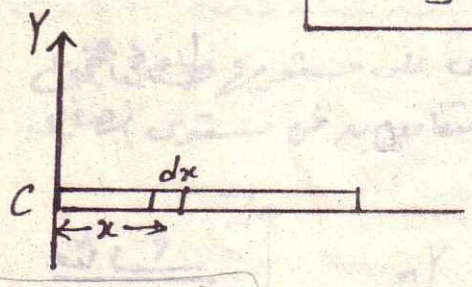
$$= 2\rho \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{3}\rho a^3$$

A rigid Lamina is a rigid body whose linear dimension in one direction is zero. It is a part of a geometrical plane and has a mass associated with every element of its area.

$$\therefore I_{Oy} = \frac{2}{3} \cdot \frac{m}{2a} \cdot a^3 = \frac{1}{3} m a^2$$

[1] $$\boxed{I_{Oy} = \frac{1}{3} m a^2}$$

$I_{Oy} = m\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2$ i.e. equivalent to a lump of matter in a distance from the origin $(L_1 = a/\sqrt{3})$



$I_{Oy} = m\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2$ a lump of matter a distance $(2a/\sqrt{3})$ away from the origin

ثانيا : اذا كان المحور عاد بطرف القضيب :

$$I_{Cy} = \rho \int_0^{2a} x^2 \, dx$$

$$= \rho \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2a} = \frac{8}{3} \rho a^3$$

$$\therefore I_{Cy} = \frac{m}{2a} \cdot \frac{8}{3} a^3 = \frac{4}{3} m a^2$$

[2] $$\boxed{I_{Cy} = \frac{4}{3} m a^2}$$

$L = 2a/\sqrt{3}$

∴ نصف قطر القصور الذاتي في الحالة الأولى

$$\sqrt{\frac{a^2}{3}} = L_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

في الحالة الثانية

$$\sqrt{\frac{4a^2}{3}} = L_2 = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

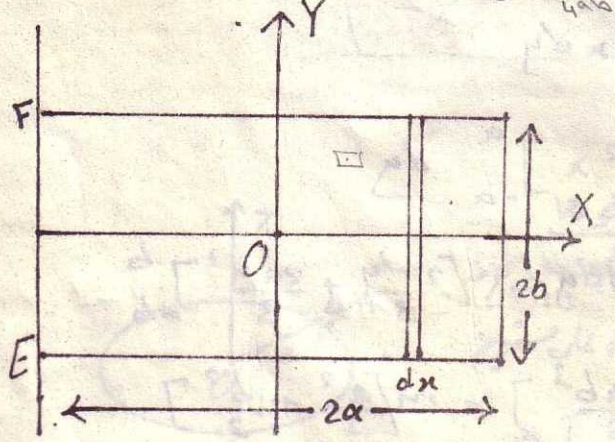
ملاحظة : عزم القصور الذاتي حول محور منطبق على طول القضيب

$$I_{Ox} = 0$$

(ب) عزم القصور الذاتي لصفيحة رقيقة مستطيلة على شكل مستطيل :

نعتبر صفيحة رقيقة مستطيلة كتلتها m على شكل مستطيل طوله 2a وعرضه 2b ومركزها O

$\sigma = \frac{m}{4ab}$ ⇒ $dm = \sigma \times dx \times 2b$



لإيجاد عزم القصور الذاتي حول OX

$$\Delta m = 2b \cdot dx \cdot \rho$$

حيث ρ كتلة وحدة المساحات من الصفيحة $= \frac{m}{4ab}$

$$\therefore \Delta I_{Ox} = \frac{1}{3} \Delta m b^2 = \frac{1}{3} \cdot 2b \rho \, dx \cdot b^2$$

$$= \frac{2}{3} b^3 \rho \, dx$$

Notice $b^2/3 = L_1^2$ (above)

$$I_{Ox} = \frac{2}{3} \rho b^3 \int_{-a}^{a} dx = \frac{4}{3} \rho b^3 \int_0^a dx$$

$$= \frac{4}{3} \rho b^3 a = \frac{1}{3} m b^2$$

$L = (b/\sqrt{3})$

[3] $$\boxed{I_{Ox} = \frac{1}{3} m b^2}$$

We can take the lamina as consisting of joined stripes like the one shown ⇒ each has a radius of gyration which is constant = $b/\sqrt{3}$ ⇒ the centre of mass of each strip is on the x axis ⇒ each strip has moment of inertia $= \Delta m \frac{b^2}{3}$

$dm = \sigma \, dy \, dx \Rightarrow r_1 = y$

$$I_{Ox} = \int_{-a}^{a} \left[\int_{-b}^{b} \sigma y^2 \, dy\right] dx$$

mass = m
Volume = $\pi a^2 l \Rightarrow \rho = m/\pi a^2 l$
element volume
$dv = e^2 de\, d\theta\, dz$
$dI = e^2 dv \Rightarrow$
$I = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{l} e^3 de\, d\theta\, dz =$
$\rho \frac{1}{4} a^4 \times 2\pi \times l = \frac{ml}{\pi a^2 l} \frac{a^4}{4} 2\pi$
$\Rightarrow I = \frac{ma^2}{2} \Rightarrow$
$l = (a/\sqrt{2})$

وبالمثل يمكنه اثبات ان عزم القصور الذاتي حول OY هو

$$I_{OY} = \frac{1}{3} m a^2$$

$(l = a/\sqrt{3})$ ④

وكذلك

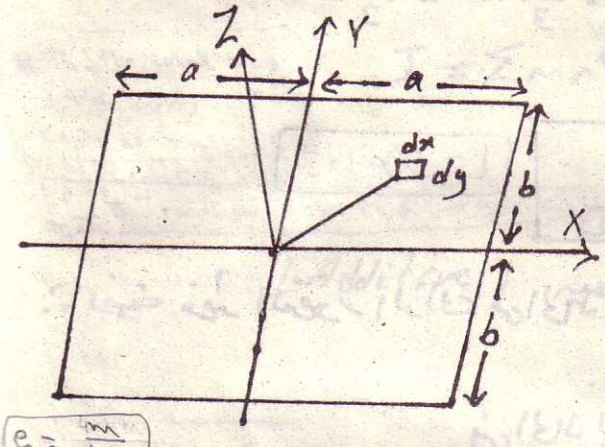
$l = ②a/\sqrt{3}$

$$I_{EF} = \frac{4}{3} m a^2$$

⑤

مثال ٢

اوجد عزم القصور الذاتي لصفيحة مستطيلة ابعادها $(2a, 2b)$ حول محور عمودي على مستوى (محور Z).



$e = \frac{m}{4ab}$

نقسم المساحة الى عناصر لصغيرة على هيئة مستطيلات الناتجة من رسم مستقيمات المتوازية ومتوازية الى محوري الاحداثيات ولصادات ولنعتبر احد هذه العناصر ولتكن كتلته Δm ولنفرض انه يرتكز عند النقطة التي احداثياتها (x, y) فاذا كانت ΔI_z هي عزم القصور الذاتي لهذا العنصر حول محور Z فان

$$\Delta I_z = \Delta m (x^2 + y^2)$$
$$= \rho \Delta x\, dy (x^2 + y^2)$$

حيث ρ هي كتلة وحدة المساحات: $\frac{m}{4ab}$

$$\therefore I_z = \rho \int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

$$= \rho \int_{-b}^{b} \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{-a}^{a} dy$$

$$= \rho \int_{-b}^{b} \left[\frac{2a^3}{3} + 2ay^2\right] dy = \rho \left[\frac{2a^3 y}{3} + \frac{2a y^3}{3}\right]_{-b}^{b}$$

$$= \rho \left[\frac{4a^3 b}{3} + \frac{4ab^3}{3}\right] = m\left[\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3}\right]$$

$$\therefore I_z = I_x + I_y$$

هذه العلاقة يمكن وضعها على الصورة الآتية :

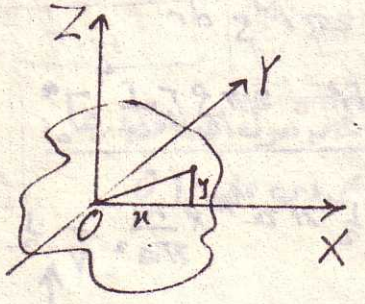
Theorem [1]

Orthogonal Axes Theorem:

نظرية ١

نظرية المحاور المتعامدة :

عزم القصور الذاتي لصفيحة مستوية حول محور عمودي على مستويها يساوي مجموع عزمي القصور الذاتي لنفس الصفيحة حول محورين متعامدين في مستوى الصفيحة ويتقاطعان على المحور الأول



المطلوب ايجاد عزم القصور الذاتي I_z حول محور عمودي على مستوى الصفيحة بدلالة عزمي القصور الذاتي I_x حول محور x ، I_y حول محور y حيث OX, OY هما محوران متعامدان في مستوى الصفيحة ويتقاطعان على المحور العمودي.

نقسم الصفيحة الى العناصر الكتلية ولنعتبر احدها ولتكن كتلته m ولنفرض انه يتركز عند النقطة (x, y)

Orthogonal Axes theorem:
For a plane lamina the moment of inertia, about an axis normal to the plane, and intersecting at O, is equivalent to the sum of moments of inertia about the remaining two axes intersecting at O

$$\therefore I_x = \sum m y^2 \quad ,$$

$$I_y = \sum m x^2 \quad ,$$

$$I_z = \sum m r^2$$

$$= \sum m(x^2 + y^2)$$

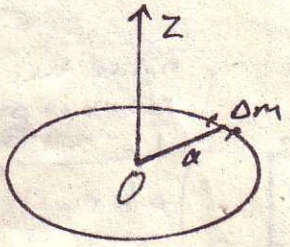
$$= \sum m y^2 + \sum m x^2$$

$$\boxed{I_z = I_x + I_y}$$

(iii) عزم القصور الذاتي لحلقة رفيعة منتظمة حول محورها

نعتبر حلقة رفيعة كتلتها m ونصف قطرها a . والمطلوب ايجاد عزم القصور الذاتي لها حول محور ماراً بمركزها عمودي على مستويها.

نأخذ عنصراً صغيراً من الحلقة Δm

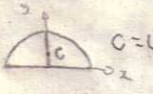


$$\Delta I_{oz} = \Delta m a^2$$

$$I_{oz} = a^2 \int dm = m a^2$$

$$\boxed{I_{oz} = m a^2}$$

For a semi-circular wire
$I_x = \frac{1}{2} m a^2 = I_y$



$C = (\bar{x}, \bar{y}) = (0, \frac{2a}{\pi})$
$= (0, a(\pi/2))$

$\rho = \frac{m}{2\pi a}$

$ds = a\,d\theta$

$\int_0^{2\pi} \rho (a\,d\theta) \times (a^2)$

$\rho a^3 \times 2\pi = \frac{m}{2\pi a} \times a^3 \times 2\pi$

$= m a^2$

$$ds^2 = (1-\frac{2m}{r})dt^2 - \frac{dr^2}{(1-\frac{2m}{r})} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 \Rightarrow$$

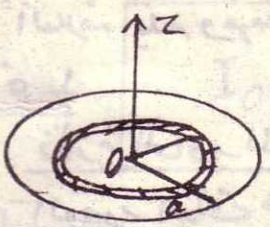
Schwarzchild Metric

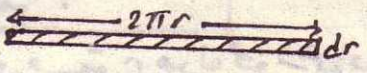
$$\boxed{ds^2 = (1-\frac{2m}{r})dt^2 - \left[\frac{dr^2}{(1-\frac{2m}{r})} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right]}$$

(أ) عزم القصور الذاتي لقرص رقيق منتظم حول محور عمودي على مستويه ويمر بمركزه

نقسم القرص الى عناصر صغيرة كل منها على شكل حلقة محصورة بين الدائرتين المتمركزتين نصفا قطريهما $r, r+dr$

∴ عرض الشريط $= dr$





كتلة العنصر $\Delta m = (2\pi r \cdot dr)\,\rho$

$$\Delta I_{oz} = \Delta m\, r^2 = 2\pi r^3 \rho\, dr$$

$$\therefore I_{oz} = 2\pi\rho \int_0^a r^3 dr = 2\pi\rho\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a$$

$$= 2\pi\rho\frac{a^4}{4} = \frac{1}{2}\pi a^4 \times \frac{m}{\pi a^2} = \frac{1}{2}ma^2$$

I_{ox} ، I_{oy}
$x_k = y_k = a/2$

Notice that I_{oz} for a ring is greater than I_{oz} for a disc

$$\therefore \boxed{I_{oz} = \frac{1}{2}ma^2}$$ (4)

radius of gyration $r_o = a/\sqrt{2}$ about oz

∴ نصف قطر القصور الذاتي للقرص حول محوره $L = \frac{a}{\sqrt{2}}$

نتيجة :

١- عزم القصور الذاتي لاسطوانة مجوفة حول محورها =

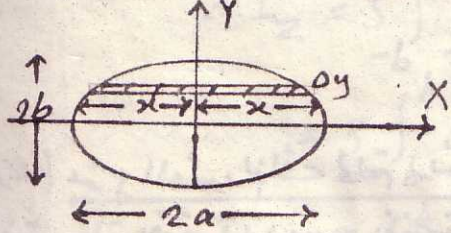
٢- " " " مصمتة " " " =

For a Cylindrical Shell $I_z = ma^2$, $L = a$

I_z for a rigid Cylinder $= \frac{1}{2}ma^2$ $(L = a/\sqrt{2})$

(ب) عزم القصور الذاتي لصفيحة على شكل قطع ناقص :

لايجاد عزم القصور الذاتي لصفيحة على شكل قطع ناقص حول القطر الاساسي الاكبر والقطر الاساسي الاصغر . نعتبر لشريحة الموازية الى محور x فاذا كانت ρ تمثل كتلة وحدة المساحات فإن



$$\Delta m = 2x \cdot \Delta y\, \rho$$

$$\Delta I_y = \frac{1}{3}(2x \cdot \Delta y)\rho\, x^2$$

$$I_y = \frac{2\rho}{3}\int_{-b}^{b} x^3 dy$$

$r = \frac{L}{1+e\cos\theta}$

$b^2 = a^2(1-e^2)$

$L = b^2/a$ = semi latus rectum

notice the radius of gyration $L = x/\sqrt{3}$ of each strip

We have an ellipse ⇒ we can see it as consisting of joined strips like the one shown above
⇒ each strip has moment of inertia $= \Delta m\, r_i^2$ and the r_i varies continuously from strip to strip which means for the one shown $I_i = 2x\,\Delta y \times \rho \times \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2$ where Δm is always lie on the y axis and $(x/\sqrt{3})$ is the radius of gyration of each strip ⇒ $I_y = \frac{2\rho}{3}\int_{-b}^{b} x \times x^2\, dy$

ولإيجاد هذا التكامل يجب استخدام المعادلات البارمترية للقطع الناقص وهي

$$x = a\cos\theta \quad , \quad y = b\sin\theta \quad \Rightarrow dy = b\cos\theta\, d\theta$$

$$\therefore I_y = \frac{2\rho}{3} a^3 b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \cos\theta\, d\theta = \frac{4\rho}{3} a^3 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta$$

$$= \frac{4\rho a^3 b}{3} \cdot \frac{3\times 1}{4\times 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

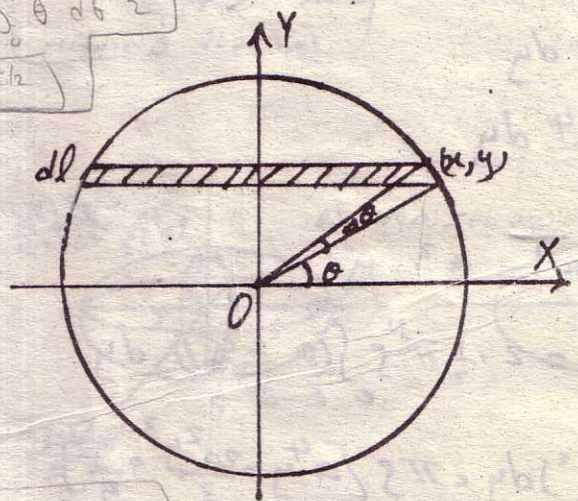
$$\therefore \boxed{I_y = \frac{m a^2}{4}}$$ [5]

بالطبع بالمثل $I_x = \frac{m b^2}{4}$

$$\therefore I_z = I_x + I_y = m\frac{a^2+b^2}{4}$$ [8]

(٧ج) عزم القصور الذاتي لقشرة كروية رقيقة متجانسة حول أحد أقطارها :

نأخذ عنصراً صغيراً من القشرة على شكل حلقة عمودية على OY عند النقطة (x, y)



$$\Delta m = (2\pi x \cdot dl)\,\rho$$ (1) dl is used here

حيث ρ هي كتلة وحدة المساحات من القشرة الكروية

$$\rho = \frac{m}{4\pi a^2}$$

$$\Delta I_{OY} = \Delta m \cdot x^2 = 2\pi\rho x^3 dl$$

$$I_{OY} = 2\pi\rho \int x^3 dl$$

ولكن

$$dl = a\, d\theta \quad , \quad (x = a\cos\theta)$$ (2)

$$\therefore I_{OY} = 2\pi\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^3 \cos^3\theta \cdot a\, d\theta$$

$$= 4\pi\rho a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta = 4\pi\rho a^4 \cdot \frac{2}{3}$$

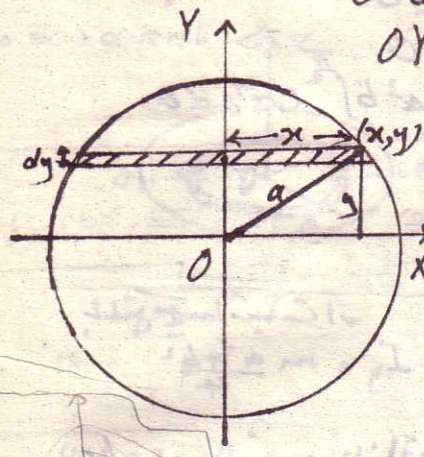
$$= \frac{2}{3} m a^2$$

$$\therefore \boxed{I_{OY} = \frac{2}{3} m a^2}$$ [9]

Of Course we Can not use dy here, but dl is used instead because of the area we always seek to appear $da = x\,d\theta\, e_\phi \times dl\, e_\theta = x\, d\theta$ ... $= \int 2\pi x\, dl = \text{area}$

(VIII) عزم القصور الذاتي للكرة مصمتة منتظمة حول احد اقطارها :

نعتبر كرة مصمتة كتلتها m ونصف قطرها a ومركزها O
والمطلوب ايجاد عزم قصورها الذاتي حول احد اقطارها OY



نأخذ عنصرا حجميا من الكرة عند النقطة (x,y) على سطح الكرة.
فيكون العنصر على شكل قرص عمودي على OY ويكون نصف قطر القرص x وسمكه dy

$$\therefore \Delta m = \pi x^2 \cdot dy \cdot \rho \quad (1)$$

dy is used here

حيث ρ هي كتلة وحدة الحجوم من الكرة.

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{3m}{4\pi a^3}$$

$$\Delta I_{OY} = \frac{1}{2}\Delta m\, x^2 \quad (2)$$

where $\left(\frac{I}{r^2}\right) = L^2$ radius of gyration

$$= \frac{1}{2}\pi \rho x^4 dy$$

$$I_{OY} = \frac{1}{2}\pi\rho \int x^4 dy$$

$x = a\cos\theta$
$y = a\sin\theta \Rightarrow dy = a\cos\theta\, d\theta = (a\,d\theta)\cos\theta$

ولكن

$$x^2 + y^2 = a^2 \longrightarrow x^2 = a^2 - y^2$$

$$I_{OY} = \frac{1}{2}\pi\rho\int_{-a}^{a}(a^2-y^2)^2 dy = 2\cdot\frac{1}{2}\pi\rho\int_0^a (a^2-y^2)^2 dy$$

$$= \pi\rho\int_0^a (a^4 - 2a^2y^2 + y^4)dy = \pi\rho\left[a^4 y - \frac{2a^2y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right]_0^a$$

$$= \frac{8}{15}\pi\rho a^5 = \frac{2}{5}ma^2$$

$L = \sqrt{I/m}\; a = \sqrt{\frac{2}{5}}\, a$

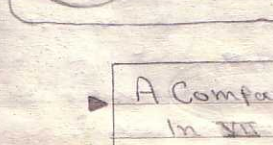
$$\boxed{I_{Oy} = \frac{2}{5}ma^2}$$

[4] For a hemi-sphere $I_{oy} = \frac{2}{5}ma^2$

ينتج :

١- عزم القصور الذاتي لنصف كرة مصمتة حول احد اقطار قاعدتها المستوية هو $\frac{2}{5}ma^2$ حيث m كتلة نصف الكرة.

٢- بالنسبة لربع الكرة ايضا فان عزم القصور الذاتي له حول احد اقطار قاعدته هو $\frac{2}{5}ma^2$ حيث m كتلة ربع الكرة.



A Comparison to reason for the use of dy instead of dl :-
In VIII as $\theta \to \pm\pi/2$ dl becomes $\perp$ da = area $\Rightarrow$ $da \cdot dl$ = volume $\to 0$ + but not because of the "infinitesimal quantities taken, but for the reason that the "wanted volume $\to$ becomes indistinguishable from being an area" $\Rightarrow$ "volume $\neq$ area"
Of Course this weakness vanishes if, + positions, we use $dy\frac{da}{\|da\|}$ as the height of every area whatever small. $\Rightarrow$ dy is better than dl.
$\Rightarrow \|da\|(da/\|da\|)\cdot dy(da/\|da\|) = da\,dy$ = volume.

$dV = r\,d\theta \times r\sin\theta\, d\phi \times dr$
$r_i^2 = r^2\sin^2\theta \Rightarrow$
$\rho = \frac{m}{(4/3)\pi r^2} = \frac{3m}{4\pi a^3}$

$I_{oz} = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^a r^4\sin^3\theta\, dr\,d\theta\,d\phi$

$\left[\frac{1}{5}\sin^3\theta\, r^5\right]_0^a =$

$\frac{1}{5}\sin^3\theta\, a^5 \Rightarrow$

$\frac{\rho}{5}a^5\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta\, d\phi$

$\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta = 4/3 \Rightarrow$

$\frac{\rho}{5}a^5 \times \frac{4}{3}\times 2\pi = \therefore$

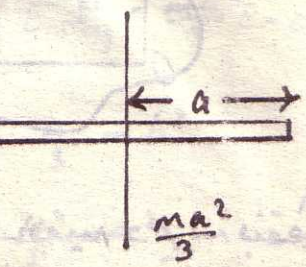
$\frac{1}{5}\cdot\frac{3m}{4\pi a^3}\times a^5\times\frac{4}{3}\times 2\pi = \frac{2ma^2}{5}$

$\frac{\rho}{5}a^5\times 2\pi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta$

$\frac{1}{5}\cdot\frac{3m}{2\pi a^3}a^5\times\pi = \frac{3ma^2}{5\times 3} \times \frac{2}{3}\times 2$

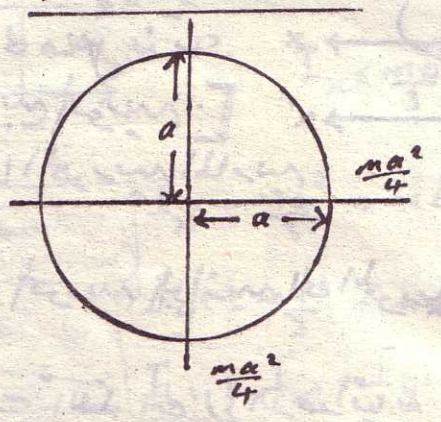
قاعدة روث (Routh Rule)

سطوح وحجوم تتحدد بمستقيمات



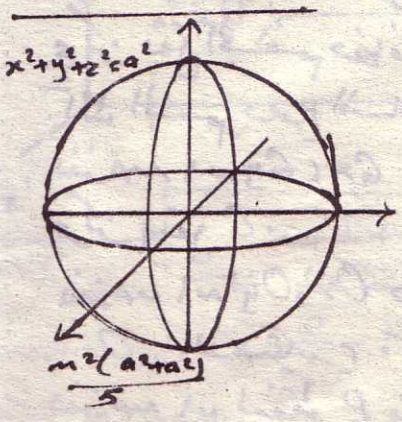
radius of gyration
$L^2 = (a/\sqrt{3})^2$

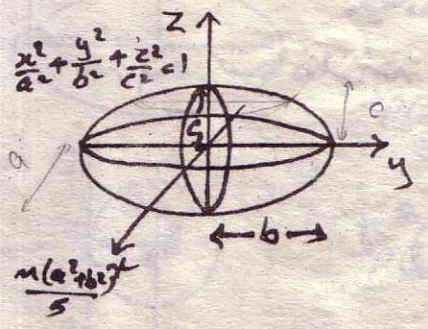
سطوح دائرية وأقواس

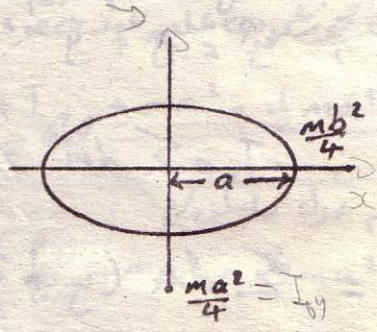


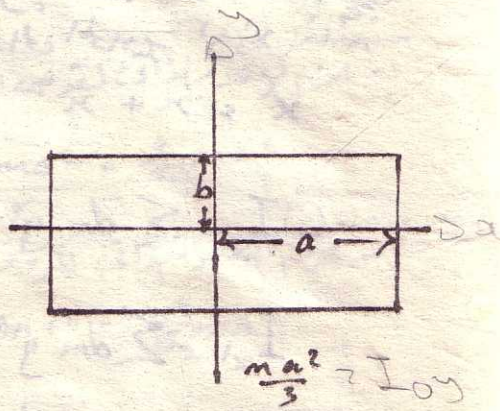
radius of gyration
$L = (a/2)^2$

حجوم كروية أو ناقصية









÷5	÷4	÷3

استنتج روث القاعدة المعروفة باسمه لحساب عزوم القصور الذاتي حول محاور معينة بأنه قسم الأجسام الى ثلاثة أنواع .

bounded by
1. Lines [3] .
2. Curves [4]
3. Surfaces [5]

① الأجسام المحدده بمستقيمات كالمربعات والمستطيلات والمكعبات --- الخ .
② السطوح المحدده بمنحنيات كالدوائر والقطاعات الناقصه .
③ الأجسام المحدده بسطوح منحنيه كالكره وبعاشات القطع الناقص حيث نحسب عزم القصور الذاتي كما هو موضح بالشكل

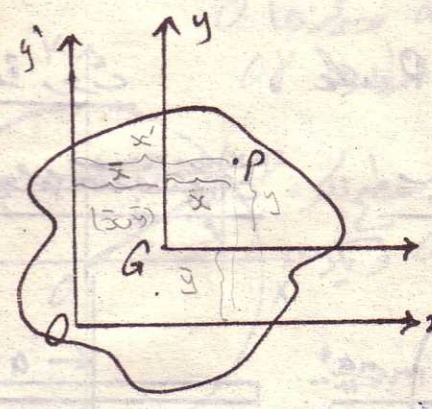
Line wire	$I_{oy} = \frac{1}{3}ma^2$, $I_{cy} = \frac{1}{3}ma^2$
Rectangular Lamina	$I_{ox} = \frac{1}{3}mb^2$, $I_{EF} = \frac{4}{3}ma^2$, $I_{oy} = \frac{1}{3}ma^2$,
Circular wire	$I_{oz} = ma^2$
Circular disc	$I_{oz} = \frac{1}{2}ma^2$
Elleptical disc	$I_{oz} = m\frac{a^2+b^2}{4}$
Hemi-Sphere	$I_{ox} = I_{oy} = \frac{2}{5}ma^2$
quarter Sphere	$I_{ox} = I_{oy} = \frac{2}{5}ma^2$
Cylindrical Shell	$I_z = ma^2$
Rigid Cylindre	$I_z = \frac{1}{2}ma^2$
Spherical Shell	$I_{oy} = \frac{2}{3}ma^2$
Rigid Sphere	$I_{oy} = \frac{2}{5}ma^2$

Theorem [2]
Parallel axes theorem:-

نظرية ٢ :

نظرية المحاور المتوازية :

[عزم القصور الذاتي لجسم متماسك حول محور ما يساوي عزم القصور الذاتي لنفس الجسم حول محور يوازي المحور المذكور ويمر بمركز ثقل الجسم مضافا الى حاصل ضرب كتلة الجسم ومربع البعد بين المحورين.]



نفرض ان Gx ، Gy هما المحوريين المارين بمركز الثقل G.

نفرض ان Ox' ، Oy' هما المحوريين الموازيين الى المحوريين السابقين ويمران بنقطة O الاختيارية.

نفرض ان النقطة P ذات الكتلة dm لها الاحداثيات (x,y) بالنسبة الى محاور مركز الثقل ، (x',y') بالنسبة الى المحاور الموازية والتي تمر بالنقطة O الاختيارية.

فاذا كانت $\bar{x}$ و $\bar{y}$ هما احداثي مركز الثقل G بالنسبة الى المحاور x',y' فان

$$x' = x + \bar{x} \quad , \quad y' = y + \bar{y}$$

من التعريف نعلم أن

with origin G $I_x = \sum dm\, y^2$, $I_y = \sum dm\, x^2$

$$I_{x'} = \sum dm\, y'^2 = \sum dm\,(y+\bar{y})^2$$

$$= \sum dm\, y^2 + 2\bar{y}\sum dm\, y + \bar{y}^2 \sum dm$$

$I_{x'y'} = \sum dm(x+\bar{x})(y+\bar{y})$
$= \sum dm(xy + \bar{x}y + x\bar{y} + \bar{x}\bar{y}) =$
$I_{xy} + m\bar{x}\bar{y} + 0 + 0$.

$\sum dm\, y = m\bar{y} = M \times 0 = 0$
for the moment of M about G is Zero

وكذلك

$$\sum dm = m \quad , \quad \sum dm\, y = 0 \quad (*)$$

if we take the summation as a continuous distribution of dm the resultant mass is at G (*)

[حيث ان عزم القصور الذاتي للكتلة حول اي محور يمر بمركز الثقل]

$$\therefore I_{x'} = I_x + m\bar{y}^2 \quad , \quad I_{y'} = I_y + m\bar{x}^2 \qquad [1]$$

$I_{x'y'} = I_{xy} + m\bar{x}\bar{y}$

due to center of mass

مثال ٣

اوجد عزم القصور الذاتي لمستطيل مركزه الثقل ابعاده $2a, 2b$ حول احد اضلاعه وحول المحور الموازي على مستوى احد اركانه.

a quarter of a circular disc $(\bar{x},\bar{y})=[\frac{a}{(3\pi/4)}](1,1)$

wire $(\bar{x},\bar{y})=[\frac{a}{(\pi/2)}](1,1)$

shell $(\bar{x},\bar{y})=(\frac{a}{2},0)$ spherical

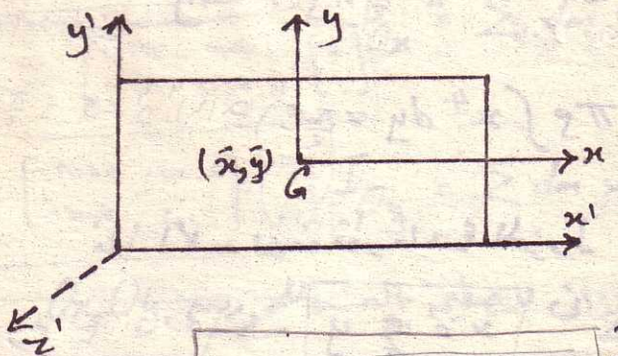
half a circular disc $(\bar{x},\bar{y})=\frac{a}{(3\pi/4)}(1,0)$

wire circular $(\bar{x},\bar{y})=\frac{a}{(\pi/2)}(1,0)$

1. $(\bar{x},\bar{y})=(\frac{2}{3}a\frac{\sin\alpha}{\alpha},0)$ circular sector

2. rigid cone $(\bar{x},\bar{y})=(\frac{3}{4}h,0)$

اذا كانت G_x, G_y هي المحاور لجوانب لضلعيه مستطيل وهما يمر بمركز الثقل كما هو موضح في الشكل فان



$$I_x=\frac{mb^2}{3}\ ,\quad I_y=\frac{ma^2}{3}$$

$$I_{x'}=\frac{mb^2}{3}+mb^2=\frac{4}{3}mb^2$$

$$I_{y'}=\frac{ma^2}{3}+ma^2=\frac{4}{3}ma^2$$

$$I_{z'}=I_{x'}+I_{y'}=\frac{4}{3}m(a^2+b^2)$$

displacement in the (y) direction = 0

$I_{Pz'}=I_{Px'Px}+I_{Py'}$

$I_{Px}=I_{Px'}=I_{Gx}=\frac{ma^2}{4}+m\times0^2$ ①

$I_{Gy}=\frac{ma^2}{4}+ma^2$ ②

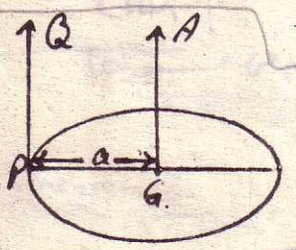
① + ② = $\frac{ma^2}{2}+ma^2$

$I_{Gx}=I_{Gy}=\frac{ma^2}{4}$

here $I_{Gx}=I_{Gy}$ but $I_{Gz}=I_{Gx}+I_{Gy}$

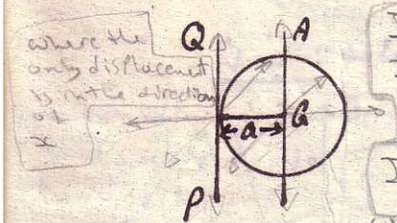
نتيجة:

١- عزم القصور الذاتي لقرص حول محور عمودي عليه عند نقطة على محيطه



$$I_{PQ}=I_{GA}+ma^2=\frac{1}{2}ma^2+ma^2=\frac{3}{2}ma^2$$

٢- عزم القصور الذاتي لكرة مصمتة حول محاس لها



where the only displacement is in the direction of x

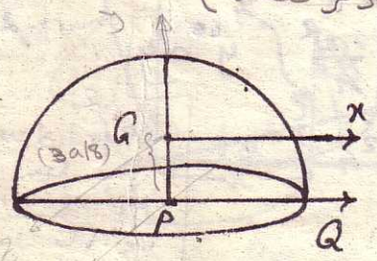
$I_{Gx}=I_{Gy}=I_{Gz}$ hence we can't say $I_{Gz}=I_{Gx}+I_{Gy}$

$I_{Oz'}=I_{Gy}+ma^2=$

$$I_{PQ}=I_{GA}+ma^2=\frac{2}{5}ma^2+ma^2=\frac{7}{5}ma^2$$

$I_{Gz}+ma^2$

٣- عزم القصور الذاتي لنصف كرة مصمتة حول محور ماراً بمركزها (بمركز ثقلها) موازٍ لقاعدتها



$$I_{PQ}=I_{Gx}+m\bar{y}^2$$

$$\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}ma^2=I_{Gx}+m.\frac{9}{64}a^2$$

$$\therefore I_{Gx}=\frac{83}{320}ma^2$$

G at $\bar{y}$ = $e=3m/2\pi a^2\times\frac{\pi}{4}a^2$

$\frac{3ma}{8m}=\frac{3a}{8}=\bar{y}$

$\bar{x}=0$

+ مثال:

اوجد عزم القصور الذاتي لمخروط مصمت منتظم حول محوره ثم حول مستقيم عمودي على المحور ومارا برأس المخروط.

$\sum M\bar{x}=\sum m_i x_i$; $\sum M\bar{y}=\sum m_i y_i$

$\bar{x}=\frac{\int x\,dm}{\int dm}$; $\bar{y}=\frac{\int y\,dm}{\int dm}$

Semi-Circle $\bar{x}=a\cos\theta=e\int r\cos\theta\,r\,dr\,d\theta$

$e=\frac{2m}{\pi a^2}$

$=\int_0^{\pi}\int_0^{a}[r^2\,dr]\cos\theta\,d\theta=$

$0=\bar{x}\Leftarrow=\int_0^{\pi}\frac{1}{3}a^3\cos\theta\,d\theta=$

$\bar{y}=a\sin\theta=e\int r^2\sin\theta\,dr\,d\theta=$

$=e\int_0^{\pi}[\int_0^{a}r^2\,dr]\sin\theta\,d\theta=$

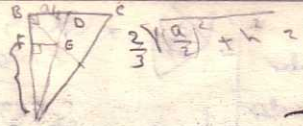
$=-\int_0^{\pi}\frac{1}{3}a^3\sin\theta\,d\theta=$

$-\frac{1}{3}a^3\cos\theta\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{3}a^3e$; $e=\frac{2m}{\pi a^2}$

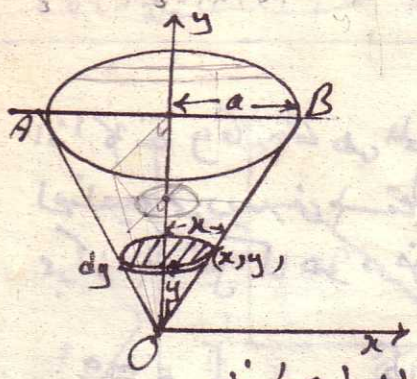
$(\bar{x},\bar{y})=(0,\frac{4a}{3\pi})$

$\bar{y}=\frac{4}{3}\times\frac{ma^2}{\pi}/m$

AFE ~ ABD
Similar ⇒
$\frac{AE}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{2}{3}$ ⇒
$AE = \frac{2}{3} AB = \frac{2}{3} h$



$\frac{2}{3}\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + h^2}$



أولاً: حول محور Oy

$\Delta m = \pi x^2 dy \cdot \rho$

$\Delta I_{Oy} = \frac{1}{2} \Delta m \cdot x^2 = \frac{1}{2} \pi \rho x^4 dy$

for each disc about
⇒ where $(\frac{x}{\sqrt{2}})^2 = r_1^2$ radius of gyration

$I_{Oy} = \frac{1}{2} \pi \rho \int x^4 dy = \frac{\pi}{2} \rho \int (a/h)^4 y^4 dy = \frac{\pi}{2} \rho (\frac{a}{h})^4 \int y^4 dy$

فإذا كان نصف قطر قاعدة المخروط a ، وارتفاع المخروط $= h$ فإن

$\tan \alpha = \frac{x}{y} = \frac{a}{h} \Longrightarrow$ $x = \frac{a}{h} y$ ⇒ $dx = \frac{a}{h} dy$

$I_{Oy} = \frac{1}{2} \pi \rho \frac{a^4}{h^4} \int_0^h y^4 dy = \frac{1}{2} \pi \rho \frac{a^4}{h^4} \left[\frac{y^5}{5}\right]_0^h$

$= \frac{1}{10} \pi a^4 \rho h$

وكذلك

$\rho = \frac{m}{\frac{1}{3} \pi a^2 h} = \frac{3m}{\pi a^2 h}$

$I_{Oy} = \frac{3}{10} m a^2$

$I_{Oy} = I_{Ox} + I_{Oz} = 2 I_{Ox} \Rightarrow I_{Ox} = \frac{1}{2} I_{Oy}$

ثانياً: حول محور Ox

$\Delta m \left[(\frac{x}{2})^2 + y^2\right]$

$\Delta I_{Ox} = \frac{1}{4} \Delta m x^2 + \Delta m y^2$ (1) (2)

$= \frac{1}{4} \pi \rho x^4 dy + \pi \rho x^2 y^2 dy$

$I_{Ox} = \frac{1}{4} \pi \rho \frac{a^4}{h^4} \int_0^h y^4 dy + \pi \rho \frac{a^2}{h^2} \int_0^h y^4 dy$

$= \frac{1}{20} \pi \rho \frac{a^4}{h^4} h^5 + \frac{1}{5} \pi \rho a^2 h^3$

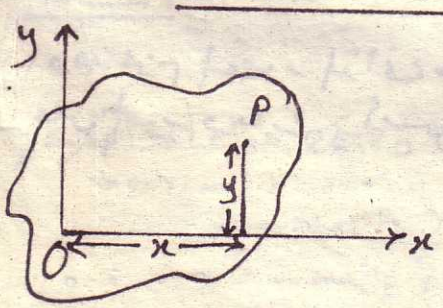
$I_{Ox} = \frac{3}{20} m \{a^2 + 4h^2\}$

(1) $(\frac{x}{2})^2$ is the radius of gyration of each disc about an axis not normal to the disc.

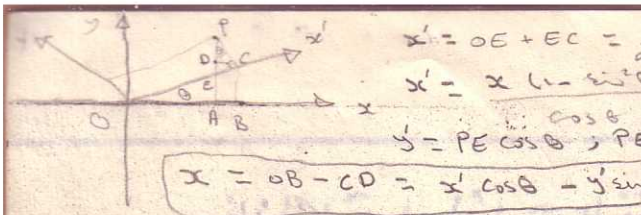
(2) is the part due to the center of mass of each disc i.e. the center of mass of each disc G_i $i = 1, 2, \ldots, n$ number of discs
now apply theorem (2)

Product of Inertia

حاصل ضرب العطور الذاتي



نعتبر جسيم رقيق مستوي ولتكن Ox, Oy محورين متعامدين في مستوى هذا الجسيم.
لتكن ρ أحد نقط هذا الجسيم
وإذا كانت dm وإذا $P \equiv (x, y)$



$x' = OE + EC = \frac{x}{\cos\theta} + [PE\sin\theta, PE = y - x\tan\theta] \Rightarrow x' = \frac{x}{\cos\theta} + y\sin\theta = \frac{x\sin\theta}{\cos\theta} =$

$x' = x(1 - \sin^2\theta) + y\sin\theta \Rightarrow \boxed{x' = x\cos\theta + y\sin\theta}$ ①

$y' = PE\cos\theta \quad , PE = y - x\tan\theta \Rightarrow \boxed{y' = -x\sin\theta + y\cos\theta}$ ②

$\boxed{x = OB - CD = x'\cos\theta - y'\sin\theta}$ ③

$y = PD + CB = y'\cos\theta + x'\sin\theta \Rightarrow$

$\boxed{y = x'\sin\theta + y'\cos\theta}$ ④

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

عزم القصور الذاتي لهذا الصفيحة حول Ox

$I_{Ox} = \sum dm\, y^2$

وعزم القصور الذاتي لهذه الصفيحة حول Oy

$I_{Oy} = \sum dm\, x^2$

كذلك نسمى المقدار I_{xy} حاصل ضرب القصور الذاتي للصفيحة بالنسبة للمحورين Ox, Oy

Product of inertia

$$\boxed{I_{xy} = \sum dm\, x\, y}$$

ملاحظة:

ينعدم حاصل ضرب القصور الذاتي لصفيحة بالنسبة لمحورين متعامدين في مستواها احدهما محور تماثل.

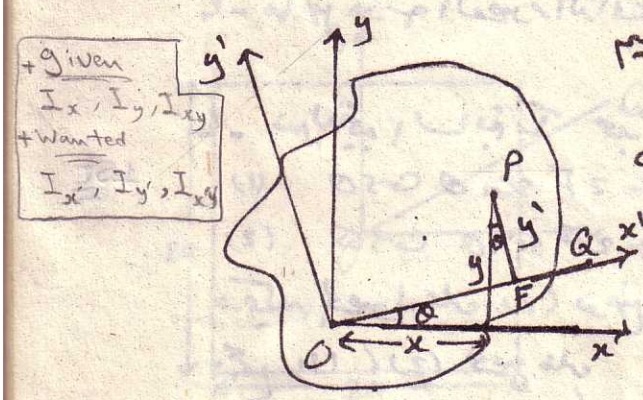
Theorem 3

Diagonal axes theorem:-

نظرية ٣:

نظرية المحاور المائلة:

[لإيجاد عزم القصور الذاتي لصفيحة حول اي مستقيم في مستويها اذا علم عزما القصور الذاتي لصفيحة حول محورين متعامدين Ox, Oy من مستواها وحاصل ضرب القصور الذاتي بالنسبة لهذين المحورين فانه يمكن ايجاد عزم القصور الذاتي للصفيحة [حول اي محور في مستوى الصفيحة مارا بالنقطة O]]



نفترض صفيحة مستوية ولنفرض أن OQ اي مستقيم من مستوى الصفيحة والمطلوب ايجاد عزم القصور الذاتي للصفيحة حول OQ

نفرض انه (Ox, Oy) محورا انه متعامدان من مستوى الصفيحة عند O ولنفرض أن المستقيم OQ يميل بزاوية θ على Ox. نفرض أن P نقطة غير مميزة من الصفيحة وانه كتلتها dm وانه $P = (x, y)$ بالنسبة للمحورين Ox, Oy

نفرض أن PF عمودي على OQ

$$\therefore I_{OQ} = \sum dm\, \overline{PF}^2$$

باعتبار OQ محورا جديدا ولنسميه Ox' والعمودي عليه Oy'

إذا كانت إحداثيات النقطة P بالنسبة للمحورين الجديدين هما $P' \equiv (x', y')$ فإن

[1] always start with ⊛ and then substitute y in terms of x, y

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$$

$$\therefore I_{OQ} = \sum dm\, y'^2 = \sum dm\,(y\cos\theta - x\sin\theta)^2$$

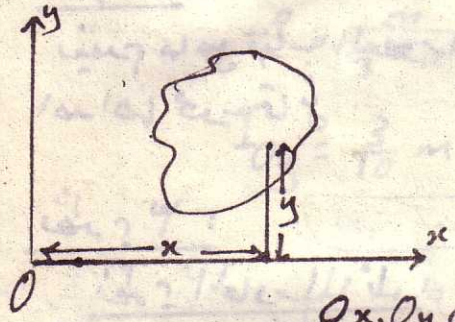
$$= \sum dm\,(y^2\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta)$$

$$= \cos^2\theta \sum dm\, y^2 + \sin^2\theta \sum dm\, x^2 - 2\sin\theta\cos\theta \sum dm\, xy$$

$$\boxed{I_{OQ} = \underset{I_x}{A}\cos^2\theta + \underset{I_y}{B}\sin^2\theta - \underset{I_{xy}}{2F}\sin\theta\cos\theta} \quad (I)$$

I

تعريف :



١- عزم العصور الذاتي للمعطى مستوي حول Ox

$$A = \sum dm\, y^2$$

٢- عزم العصور الذاتي للمعطى حول Oy

$$B = \sum dm\, x^2$$

٣- حاصل عزم العصور الذاتي للمعطى بالنسبة للمحورين Ox, Oy

$$F = \sum dm\, xy$$

٤- سم النتيجة السابقة I مبدأ

$$I_{Ox'} = A' = A\cos^2\theta + B\sin^2\theta - 2F\sin\theta\cos\theta \quad (1)$$ 1st

$$I_{Oy'} = B' = A\sin^2\theta + B\cos^2\theta + 2F\sin\theta\cos\theta \quad (2)$$

ويمكن الحصول على (2) بوضع $\frac{\pi}{2} + \theta$ بدلاً من θ في (1)

بجمع (1)، (2) نحصل على

$$A' + B' = A + B \quad (3)$$

وهذا واضح لأن كل من المقادير في المعادلة (3) يمثل عزم العصور الذاتي للمعطى حول محور عمودي بالنقطة O تجري على مستواها.

Go To, as in [2]

كذلك حاصل عزم العصور الذاتي بالنسبة للمحورين Ox', Oy' 2nd

Product of inertia w.r.t. $Ox'y'$ frame

$$F' = \sum dm\, x'y' = \sum dm\,(x\cos\theta + y\sin\theta)(y\cos\theta - x\sin\theta)$$

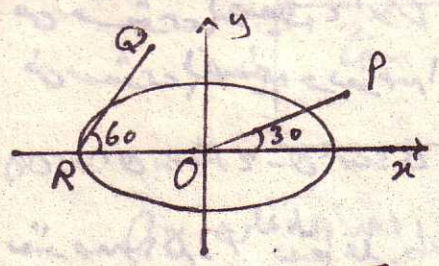
$$= \sum dm\,(y^2\sin\theta\cos\theta - x^2\sin\theta\cos\theta + xy(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= \sin\theta\cos\theta \sum dm\,(y^2 - x^2) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \sum dm\, xy$$

$$F' = \tfrac{1}{2}(A - B)\sin 2\theta + F\cos 2\theta \quad (II)$$

مثال ٥

اوجد عزم العصور الذاتي لصفيحة على هيئة قطع ناقص حول محور يمر بمركز القطع ويميل بزاوية 30° على محور القطع.



$$A = \frac{1}{4}mb^2 \quad , \quad B = \frac{1}{4}ma^2$$

$$F = 0$$

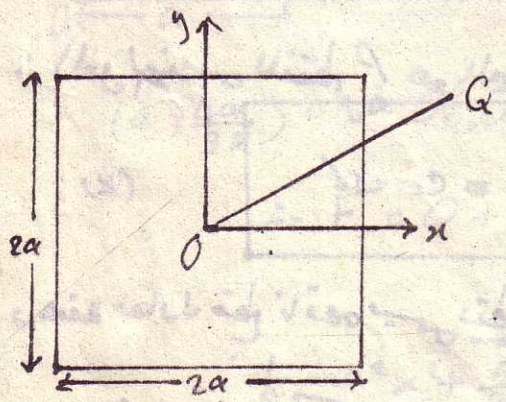
$$I_{OP} = A\cos^2\theta + B\sin^2\theta - 2F\sin\theta\cos\theta$$
$$= \frac{1}{4}mb^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}ma^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{m}{16}\{3b^2 + a^2\}$$

سؤال

اوجد عزم العصور الذاتي للقطع حول RQ الذي يميل بزاوية 60° على محور القطع.

مثال ٦ :

اثبت ان عزم العصور الذاتي لصفيحة مربعة الشكل حول اي محور مار بمركزها هو $\frac{1}{3}ma^2$ حيث $2a$ طول ضلع الصفيحة.



$$A = \frac{1}{3}ma^2 \quad , \quad B = \frac{1}{3}ma^2$$

$$F = 0$$

$$I_{OQ} = \frac{1}{3}ma^2\cos^2\theta + \frac{1}{3}ma^2\sin^2\theta$$
$$= \frac{1}{3}ma^2$$

$$\therefore \boxed{I_{OQ} = \frac{1}{3}ma^2}$$

∴ عزم العصور الذاتي لصفيحة مربعة حول اي مستقيم مار بمركزها ثابت.

$$\begin{bmatrix} I_{x'} \\ I_{y'} \\ I_{x'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I^\circ_x + m\bar{y}^2 \\ I^\circ_y + m\bar{x}^2 \\ I^\circ_{xy} + m\bar{x}\bar{y} \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} I_{x'} \\ I_{y'} \\ I_{x'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cdot\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \frac{1}{2}\sin 2\theta & -\frac{1}{2}\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_{xy} \end{bmatrix} \quad (Ox \perp Oy) \perp Oz$$

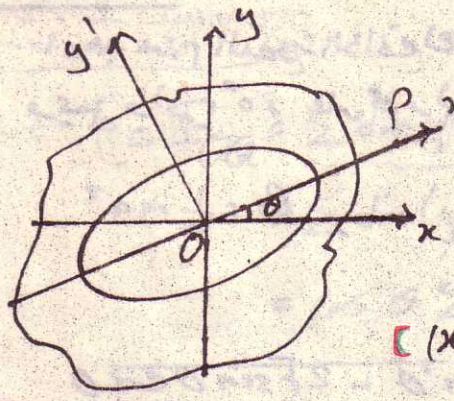
$$; \; I_x + I_y = I_z$$

"Orthogonal"

« Parallel Axes Theorem » ; « Diagonal Axes Theorem » ; axes theorem

قطع ناقص القصور الذاتي : Momental Ellipse

3rd



نعتبر جسم مستوي ، Ox, Oy محوران متعامدان في مستوى الصفيحة ، Ox' أي مستقيم آخر في مستوى الصفيحة ونفرض أنه يميل بزاوية θ على Ox

$$I_{Ox'} = A\cos^2\theta + B\sin^2\theta - 2F\sin\theta\cos\theta$$

نفرض أن P نقطة على Ox' ولها الإحداثيات (x,y) وأن $OP = r$ بحيث يكون

$$I_{Ox'} \propto \frac{1}{r^2} \quad (1)$$

$$I_{Ox'} = \frac{mL^4}{r^2} \quad (2)$$

Notice the Point (P) Lieon the Ox' axes

حيث L ثابت له نفس وحدات الطول . ولكن

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

θ = Const.

بالتعويض في (1) نجد أن

$$\frac{mL^4}{r^2} = A\frac{x^2}{r^2} + B\frac{y^2}{r^2} - 2F\frac{xy}{r^2}$$

∴ المحل الهندسي للنقطة P هو المنحنى

$$I_x x^2 + I_y y^2 - 2I_{xy}xy = mL^4$$

$$Ax^2 + By^2 - 2Fxy = mL^4 = const \quad (2)$$

w.r to the Oxy frame

وهذه معادلة قطع ناقص يسمى بقطع ناقص القصور الذاتي

وحيث أنه يمكننا دائما اختيار محاور بحيث تصبح معادلة القطع الناقص (2) على الصورة

w.r to the, new, Principle axes x, y.

$$A^*x^2 + B^*y^2 = const$$

w.r to the the new Coordinates

[أي أنه بالنسبة للمحاور الجديدة يكون معامل حاصل ضرب القصور الذاتي للصفيحة = صفر يسمى هذا المحور " بالمحور الرئيسي للصفيحة عند O "

[المعاملات A^*, B^* يسميان " بعزمي القصور الذاتي الرئيسيين للصفيحة عند O "

A^*, B^* are Called the Principle Moments of inertia for the Lamina at O.

وكذلك $F' = \frac{1}{2}(A-B)\sin 2\theta + F\cos 2\theta$

Therefore w.r to the Principle axes $F' = 0$

∴ بالنسبة للمحاور الرئيسية يكون

اى أنه

$$\frac{1}{2}(A-B)\sin 2\theta = -F\cos 2\theta$$

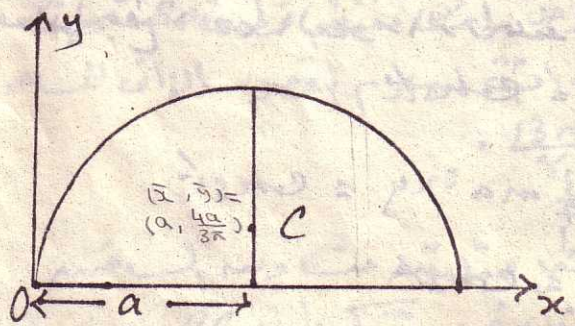
$$\therefore \boxed{\tan 2\theta = \frac{2F}{B-A}}$$

$I_x x^2 + I_y y^2 - 2I_{xy} xy = mL^4$
momental ellipse.
$\tan 2\theta = 2I_{xy}/(I_y - I_x)$

وهذه العلاقة تعين اتجاه المحوريه الاساسيه اذ يميل احداها على Ox بالزاويه θ والآخر بالزاويه $(\frac{\pi}{2}+\theta)$.

مثال ٧

جسم متوسط على شكل نصف دائره. اوجد معادله قطع ناقص القصور الذاتى عند احد طرفى قاعدته ثم عين المحوريه الاساسيه لهذا الطرف.



$$A = \frac{1}{4}ma^2$$

$$B = \frac{1}{4}ma^2 + ma^2 = \frac{5}{4}ma^2$$

بما ان احداثى مركز ثقل نصف C بالنسبه للمحوريه Ox, Oy هما $(a, \frac{4a}{3\pi})$

$$\therefore F = 0 + m\cdot\frac{4a}{3\pi}\cdot a = \frac{4ma^2}{3\pi}$$

∴ معادله قطع ناقص القصور الذاتى عند O هى

$$\frac{1}{4}ma^2x^2 + \frac{5}{4}ma^2y^2 - \frac{8ma^2}{3\pi}xy = Const$$

$$x^2 + 5y^2 - \frac{32}{3\pi}xy = Const$$

$$\tan 2\theta = \frac{2F}{B-A} = \frac{2\cdot\frac{4ma^2}{3\pi}}{\frac{5}{4}ma^2 - \frac{1}{4}ma^2} = \frac{8}{3\pi}$$

$$\therefore \theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{8}{3\pi}\right)$$

$\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} \Rightarrow e = \frac{3m}{4\pi a^3}$

$dm = \rho\,dV = \rho\, r^2 \sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi$

$x = r\sin\theta \Rightarrow \bar{x} = \frac{\rho}{m}\int r^3 \sin^2\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi$

$\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}a^4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta\right] d\varphi$

$\frac{3}{8}a\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\rho a^4}{4}\left(\frac{\pi}{4}-0\right) 2\pi \times \frac{3}{4\pi a^3}$

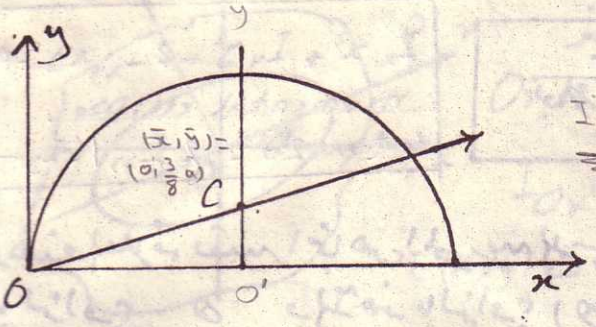
$\int dV = r\sin\theta\, d\theta \cdot dr \cdot r\,d\varphi =$

$\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\sin\theta\left[\int r^2\,dr\right] d\theta\right] d\varphi =$

$\frac{2}{3}a^3 \times 2\pi = \frac{4}{3}\pi a^3 = V$

مثال ٨

نصف كرة مصمت نصف قطرها a وكثافته ρ أوجد معادلة قطع ناقص القصور الذاتي عند نقطة على محيطه قاعدته ثم حسب المحوريه الاساسيه لنصف الكره في المستوى الرأسي المار بمركز ثقل نصف الكره.



$I_{O'x} = I_{Ox} = A = \frac{2}{5}ma^2$

$I_{Oy} = B = \frac{2}{5}ma^2 + ma^2 = \frac{7}{5}ma^2$

$I_{Oy} = I_{G_y} + m a^2$

بما أن احداثي مركز ثقل نصف الكره C بالنسبة للمحوريه Ox, Oy هي $(a, \frac{3}{8}a)$

$\therefore F = 0 + m\left(a \cdot \frac{3}{8}a\right) = \frac{3}{8}ma^2$

معادلة قطع ناقص القصور الذاتي عند O هي

$Ax^2 + By^2 - 2Fxy = const$

$\frac{2}{5}ma^2x^2 + \frac{7}{5}ma^2y^2 - \frac{3}{4}ma^2xy = const$

$2x^2 + 7y^2 - \frac{15}{4}xy = const$

$\tan 2\theta = \frac{2F}{B-A} = \frac{3}{4}ma^2 / \left(\frac{7}{5}ma^2 - \frac{2}{5}ma^2\right) = \frac{3}{4}$

$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{3}{4}$

$3\tan^2\theta + 8\tan\theta - 3 = 0$

$(3\tan\theta - 1)(\tan\theta + 3) = 0$

$\tan\theta = \frac{1}{3} \quad \text{or} \quad -3$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{1}{3}$

وكذلك المحور الآخر يميل بزاوية

$\left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$

تمارين على الباب السابع

١ أوجد عزم القصور الذاتي للوح مستطيل ضلعاه a و b حول محور عمودي على اللوح ويمر بأحد الرؤوس.

٢ اوجد عزم القصور الذاتي لمتوازي مستطيلات منتظم كتلته m وأطوالها $2a, 2b, 2c$ حول محاور عامة بمركزه وموازية لأطوالها.

Sep. 90

٣ اوجد عزم القصور الذاتي لصفيحة منتظمة الكثافة على شكل مثلث
(أ) حول مستقيم عار بأحد الرؤوس وموازي للقاعدة المقابلة
(ب) حول القاعدة.

٤ اذا بليت حافة دائرية قطرها a سم قرص دائري منتظم قطره $5a$ بحيث كانت المسافة بينه ومركز الدائرة البشير $(\frac{3a}{2})$. اثبت ان عزم القصور الذاتي للجزء المتبقي حول القطر المشترك يساوي $\frac{13m}{8}$.

May 90

+ ٥ صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها m على شكل مثلثي متساوي الساقين ارتفاعها a و b وفي جهتين مختلفتين عن قاعدة مشتركة طولها $2c$.
اثبت ان عزم القصور الذاتي حول محور عار بمنتصف القاعدة المشتركة وعمودي على مستوى الصفيحة يساوي $\frac{m}{6}(a^2+b^2+c^2-ab)$.

٦ اوجد عزم القصور الذاتي لمخروط دائري قائم ناقص متوازن القاعدتين حول محور تمر حول قطر في قاعدته الكبرى.

٧ اوجد معادلة قطع ناقص القصور لنصف كرة منتظمة موضوعة عند نقطة O على حافة قاعدة الدائرية. برهن ان احد المحاور الاساسية يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع مستوى القاعدة.

٨ اثبت ان معادلة قطع ناقص القصور عند تركز قرص على شكل القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ هي

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+z^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=\text{const}$$

٩ اوجد معادلة قطع ناقص القصور لمخروط دائرى قائم وهو منتظم ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته a عند نقطة O على محيط القاعدة. عين اتجاهات المحاور الاساسية عند O وبرهن انه اذا كانت الزاوية الرأسية للمخروط تساوى $2\tan^{-1}\frac{1}{2}$ فانه احدها يمر بمركز ثقل المخروط.

١٠ اثبت ان قطع ناقص القصور لنصف كرة مجوفاء منتظم عند رأس كرة واستنتج ان عزم القصور الذاتى لا حول اى محور مار برأس يساوى $\frac{2}{3}ma^2$ حيث m كتلتها، a نصف قطرها.

١١ اثبت ان المحاور الاساسية لمكعب منتظم عند احد اركانه O هى المستقيم الواصل من O الى مركز المكعب واى مستقيمين متعامدين ومعموديين عليه عند O. برهن ان معادلة قطع ناقص القصور للمكعب عند O هى $2x^2+11(y^2+z^2)=\text{Const}$.

---

(12) صفيحة مستوية منتظمة على شكل نصف دائرة مركزها C ونصف قطرها b. اثبت ان PCA هو احد المحاور الاساسية. اوجد معادلة قطع ناقص القصور الذاتى للصفيحة عند نقطة P. ثم عين اتجاهات المحاور الاساسية.

(13) اوجد معادلة قطع ناقص القصور الذاتى لمثلث متساوى الاضلاع طول ضلعه a ومركزه O وبين ان OA احد المحاور الاساسية عند O حيث A احد رؤوس المثلث.

(9) صفيحة منتظمة على شكل ربع قطع ناقص عند مركز القطع

(ط) [illegible] ثلث قائم الزاوية عند احد رؤوسه الحادة.

(ك) نصف دائرة منتظمة عند أحد طرفى القطر المحدد.

(ص) 5 May 91 صفيحة نصف دائرة منتظمة عند أحد طرفى القطر المحدد.

(14) اوجد معادلة قطع ناقص القصور لصفيحة مستطيلة طولها 8 cm وعرضها 4 cm عند النقطة $P(2,1)$ اذا كانت النقطة الاولى عند مركز السطح طول، ومحاور السيمات بعدا عن اطراف الطول للمستطيل. اوجد اتجاهات المحاور الاساسية.

(15) اوجد معادلة قطع ناقص عند مركز الكتلة لصفيحة منتظمة على شكل مثلث طول أضلاعه 3 و 4 و 5

الباب الرابع

حركة جسم جاسئ في بعدين

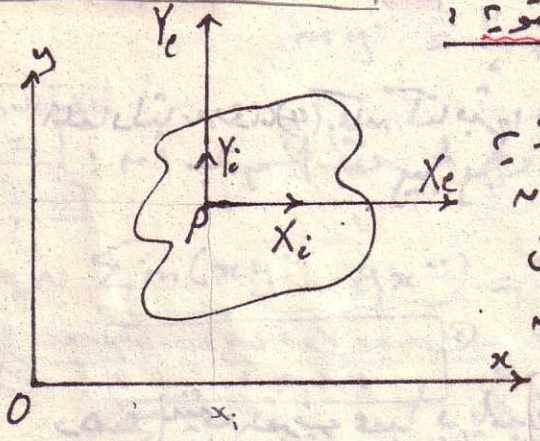
التدحرج والانزلاق

The equations of motion for a rigid body in a uniplanar motion

١- معادلات حركة جسم جاسئ يتحرك حركة مستوية :

[1]

نفرض اننا xOy احد مستويات الحركة المتوازية التي تتحرك فيها نقط الجسم حيث Ox, Oy محوران متعامدان ونفرض ان P احدى نقط الجسم التي تتحرك في هذا المستوى ونفرض ان كتلة m وان P لها الاحداثيات x, y



القوى المؤثرة على النقطة P :

(a)

لاحظ ان القوى المؤثرة على النقطة المادية P تنقسم الى مجموعتين مختلفتين من القوى

(i) مجموعة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم بأكمله من الخارج ونفرض ان تأثير هذه القوى على النقطة P له مركبتان هما X_e, Y_e

(ii) مجموعة القوى الداخلية الناتجة عن الجذب المتبادل بين نقط الجسم والنقطة P ونفرض ان مركبتا هذه المجموعة عند النقطة P هما X_i, Y_i

لاحظ ان :

مجموع مركبات هذه المجموعة لجميع نقط الجسم تكون صفر اى ان

$$\sum X_i = 0 \quad , \quad \sum Y_i = 0$$

$$\sum (x Y_i - y X_i) = 0 \qquad \sum_{\forall j} \vec{r}_j \times \vec{F}_j^{int.} = 0$$

① about Point y_i

② about Point x_i

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & 0 \\ X & Y & 0 \end{vmatrix} = \vec{r} \times \vec{F} = (xY - yX)\vec{k}$$

حيث المجموع هنا يسرى لجميع نقط الجسم

معادلة حركة النقطة P :

(b)

$$m\ddot{x} = X_i + X_e \qquad (1)$$

$$m\ddot{y} = Y_i + Y_e \qquad (2)$$

(C) معادلتا الحركة الخطية للجسم :

Two equations for the linear motion of the rigid body.

بجمع المعادلتين (1)، (2) لجميع نقط الجسم نجد أنه

$$\sum m\ddot{x} = \sum X_i + \sum X_e = 0 + \sum X_e$$

$$\therefore \sum m\ddot{x} = \sum X_e \qquad (3)$$

كذلك

$$\sum m\ddot{y} = \sum Y_e \qquad (4)$$

De Lambert's Principle

المعادلتين (3)، (4) يمكن كتابتهما على الصورة الآتية

$$\sum (X_e - m\ddot{x}) = 0$$

$$\sum (Y_e - m\ddot{y}) = 0$$

وهذه النتيجة تعرف بمبدأ دالمبير [D'Alembert's Principle] ويمكن صياغته كالتالي :

" مجموعة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم ومعكوس القوى الفعالة تكون مجموعة متزنة ".

المعادلتين (3)، (4) يمكن وضعهما في صورة مناسبة باستخدام احداثي مركز الثقل فإذا كانت $\bar{X}, \bar{Y}$ احداثي مركز الثقل عند اللحظة t فإن [2]

Inertia moment about the OY axis (i.e. about Point Y) $= M\bar{x} = \sum mx$

taking the drivative of the two sides w.r.t. (t)

(1)

Linear momentum in the OX and OY direction

كمية الحركة الخطية للجسم في اتجاه O_x $= M\dot{\bar{X}} = \sum m\dot{x}$

(2)

وكذلك نجد أن

كمية الحركة الخطية للجسم في اتجاه O_y $= M\dot{\bar{Y}} = \sum m\dot{y}$

having a second derivative w.r to (t)

وبالتفاضل مرة ثانية $M\ddot{\bar{X}} = \sum m\ddot{x}$ ، $M\ddot{\bar{Y}} = \sum m\ddot{y}$

∴ المعادلتين (3)، (4) يمكن كتابتهما على الصورة

$$M\ddot{\bar{X}} = \sum X_e = X$$

$$M\ddot{\bar{Y}} = \sum Y_e = Y \qquad (3)$$

$$M\underline{\ddot{a}} = M(\ddot{\bar{x}}, \ddot{\bar{y}}) = (X, Y) = \underline{F_e}$$

I. The linear motion of a rigid body $\equiv$ The linear motion of the center of mass as a point particle representing the whole rigid body

حيث X, Y هما مركبتا المحصلة لقوى الخارجية المؤثرة على الجسم

المعادلتان 1 فقرناه بمعادلتي الحركة الخطية للجسم أو بمعادلتي حركة مركز الثقل باعتباره نقطة مادية تتحرك في بعدي الكتلة الكلية للجسم وواقعة تحت تأثير القوى الخارجية المؤثرة على الجسم بأكمله.

The eqtns of Rotational motion of the body:

معادلة الحركة الدورانية: [3]

معادلتا حركة المركز

$$m\ddot{x} = X_i + X_e$$ about the (x axis)

$$m\ddot{y} = Y_i + Y_e$$ about the y axis

i.e. taking the moments

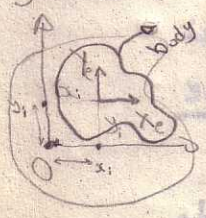
$\underline{r} \times m\underline{\ddot{r}} = \underline{r} \times \underline{F_e} = \underline{\dot{L}_0} = \underline{\dot{h}_0}$

$\times (-y)$

بضرب المعادلة (1) في $-y$ والمعادلة (2) في x وجمع لجميع نقط الجسم نجد أن:

(1) is taken about the point x_i

(2) is taken about the point y_i



$$\sum m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) = \sum(xY_i - yX_i) + \sum(xY_e - yX_e)$$

(*) 1) moment due to $(Y_e) = +ve$; 2) " " " $X_e = -ve$

$$= 0 + \sum(xY_e - yX_e)$$

Total sum of moments

$$\sum_{(L.H.S)} m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) = L_0 \quad (R.H.S) \quad (5)$$

L.H.S is due to the resulting acceleration as the body is affected by the external forces of the R.H.S

حيث L_0 هي مجموع عزوم القوى الخارجية حول O

ولو رجعنا للطرف الأيمن من المعادلة (5) في صورة مناسبة لوحظ أن

(h_0 = كمية الحركة الزاوية للجسم حول O)

h_0 = angular momentum for the body about the origin O

$$h_0 = \sum m(xy^{(2)} - y^{(1)}x^{\cdot})$$

h_0 = معدل تغير h_0 =

$$\frac{dh_0}{dt} = \dot{h}_0$$

$$= \sum m(\dot{x}\dot{y} + x\ddot{y} - \dot{x}\dot{y} - y\ddot{x})$$

$$= \sum m(x\ddot{y} - y\ddot{x})$$

$$\dot{h}_0 = \sum m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) \quad (6)$$

Notice: linear momentum for a point like particle is $m_i \dot{y}$ in the direction of the (Y axis) ② taking the moment of the linear momentum about the Y axis = $m_i \dot{y} \times x_i$; the same for the component of velocity in OX axis direction

من (5)، (6) نجد أن

$\underline{\dot{h}_0} = \underline{L_0}$

$$\boxed{\dot{h}_0 = L_0}$$

rate of change of angular momentum for a rigid body about wrt fixed basis equals the total sum of moments due to external forces

ونعرف بقاعدة كمية الحركة الزاوية [Principle of Angular Momentum] وينص على أن

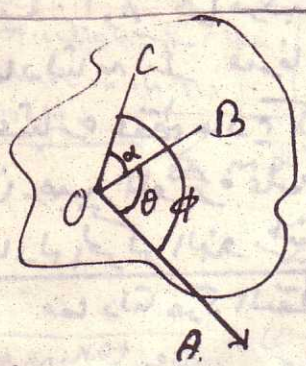
"معدل تغير كمية الحركة الزاوية بالنسبة للزمن حول نقطة ثابتة (أو حول محور) يساوي مجموع عزوم القوى الخارجية حول نفس النقطة".

Notice h_0 is only taken about the fixed O, but the body is free to move in the plane.

Notice, here, the body is fixed at O and is able to perform angular motion only.

٣- السرعة الزاوية لجسم جاسئ يدور حول محور ثابت :

نرسم قطعة من الجسم عمودياً على محور الدوران ولتفرض انه يقطع من النقطة O ولتفرض ان OA اتجاه ثابت من الفراغ وان OB قطعة ثابتة من الجسم وان الزاوية $B\hat{O}A = \theta$. فتكون السرعة الزاوية للجسم حول المحور تساوى



angular velocity for a rigid body about a fixed axis

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

وذلك لانه لو فرضنا ان OC اى قطعة أخرى ثابتة فى المقطع المرسوم حيث $C\hat{O}A = \phi$ للقطعة أن

$$\phi = \theta + \alpha$$

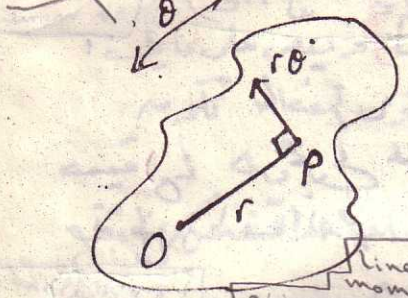
$$\dot{\phi} = \dot{\theta} + 0$$

لان الزاوية α ثابتة ولا تتغير بتغير الزمن وبالتالى

فان السرعة الزاوية الكلية للجسم حول المحور $= \dot{\theta}$

٤- كمية الحركة الزاوية لجسم يدور حول محور ثابت :

نرسم قطعة من الجسم عمودياً على محور الدوران ولتفرض انها تقابل فى المقطع O ولتفرض السرعة الزاوية للجسم حول المحور فى لحظة ما هى $\dot{\theta}$ ولتفرض ان P احدى نقط المقطع وانها على بعد r من O



linear momentum for a point particle $= mr\dot{\theta}$

$\therefore$ سرعة النقطة P هى $v_P = r\dot{\theta}$ فى اتجاه

عمودى على OP. كمية حركة النقطة P $= P =$

كمية الحركة الزاوية للنقطة P حول O $=$

angular momentum for a point particle about a fixed axis $\equiv mr\dot{\theta} \times r = mr^2\dot{\theta}$

$\therefore$

$$h_O = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \dot{\theta}$$

angular momentum for a rigid body about a fixed axis

[1]

$$h_O = \dot{\theta} \sum mr^2$$

$$h_O = I_O \dot{\theta}$$

وكذلك فان طاقة حركة هذا الجسم $T = \sum \frac{1}{2} m (r\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \sum mr^2$

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2$$

Kinetic energy for a rigid body moving about a fixed axis

[2]

٤ - معادلة الحركة الدورانية لجسم يدور حول محور ثابت :

The equation of rotational motion for a body in a uniplanar motion

معادلة الحركة الدورانية لأى جسم يتحرك حركة مستوية هى

$$\dot{h}_O = L_O \qquad \text{II}$$

وفى حالة الجسم الذى يدور حول محور ثابت بسرعة زاوية $\dot{\theta}$ ، وتكون

a rigid body moving about a fixed axis with angular velocity $\dot{\theta}$

$$\Rightarrow h_O = I_O \dot{\theta}$$

∴ المعادلة II تأخذ الصورة :

$$\frac{dh_O}{dt} = \frac{d}{dt}(I_O \dot{\theta}) = L_O$$

$$\boxed{I_O \ddot{\theta} = L_O} \qquad \text{II}'$$

ملحوظات هامة :

١ - عندما يكون المجموع الجبرى لعزوم القوى لاحظ أن العزم يكون موجبا إذا كان فى اتجاه تزايد الزاوية θ

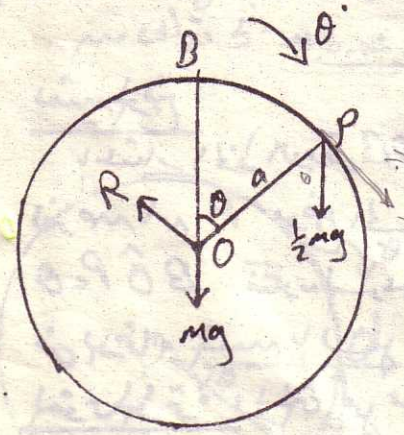
وأن العزم يكون سالبا إذا كان فى اتجاه تناقص الزاوية θ

(LOOK)

٢ - لتعيين السرعة الزاوية $\dot{\theta}$ التى يدور بها الجسم حول المحور : نأخذ اتجاها ثابتا فى الفراغ ثم نأخذ خطا ثابتا فى الجسم ونعين الزاوية بينهما هى θ

مثال ١

قرص دائرى سنتظم مركزه O يمكنه أن يدور بسهولة فى مستوى رأسى لمركز O . لصق بحافة القرص جسيم صغير كتلته $(\frac{1}{2}m)$ حيث m كتلة القرص - عند الوضع P . فإذا بدأ القرص فى الدوران عندما كان OP رأسيا إلى أعلى . أوجد طاقة حركة المجموعة عندما يصبح OP رأسيا إلى أسفل .



تعيين الوضع :

باختيار OP الرأسى إلى أعلى اتجاها ثابتا فى الفراغ.

نفرض أن P موضع الجسيم الصغير عند اللحظة t

حيث $\theta = BOP$ تمثل السرعة الزاوية للقرص عندئذ هى $\dot{\theta}$ فى الاتجاه المبين فى الرسم .

القوى المؤثرة على المجموعة :

١ - mg وزن القرص رأسيا إلى أسفل

٢ - R رد فعل المحور عند O

٣ - $\frac{1}{2}mg$ وزن الجسيم رأسيا إلى أسفل عند P

معادلة الحركة :

$$I_O \ddot{\theta} = L_O$$

$$I_O = I_{\text{للقرص}} + I_{\text{للجسم}}$$

$$= \tfrac{1}{2}ma^2 + \tfrac{1}{2}ma^2 = ma^2$$

$$\therefore ma\ddot{\theta} = \tfrac{1}{2}mg \cdot a\sin\theta$$

ملاحظة :

$$\int \ddot{\theta}\, dt = \dot{\theta} \quad , \quad \int \ddot{\theta}\, d\theta = \tfrac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \int \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta}\, d\theta$$

نكامل بالنسبة الى θ مبدأه

$$\tfrac{1}{2}a\dot{\theta}^2 = \tfrac{1}{2}g\int \sin\theta\, d\theta$$

$$= -\tfrac{1}{2}g\cos\theta + \text{Const}$$

$$a\dot{\theta}^2 = -g\cos\theta + c$$

$\dot{\theta} = 0$ عندما $\theta = 0 \Rightarrow c = g$ ولكن

$$\therefore a\dot{\theta}^2 = g(1 - \cos\theta)$$

ولكن عندما يصبح OP رأسيا الى أسفل تكون $\theta = \pi$

$$a\dot{\theta}^2 = g(1 - \cos 180) = 2g$$

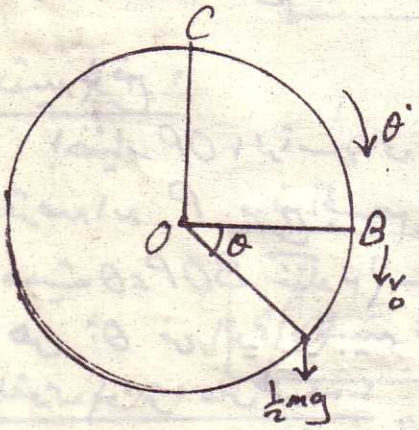
$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}$$

$\therefore$ طاقة حركة المجموعة عندما يصبح OP رأسيا الى أسفل $= \tfrac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 = \tfrac{1}{2}ma^2 \cdot \frac{2g}{a} = mag$

مثال ٢

من المثال السابق اذا بدأت الحركة عندما كان OP افقيا وقذف الجسم رأسيا الى أسفل بسرعة V_0 . اوجد الشرط اللازم لكي تدور المجموعة دورة كاملة .

$$V = a\dot{\theta} \Rightarrow V_0 = a\dot{\theta} \text{ at } t = 0$$



الحل :

باعتبار الخط الافقي OB اتجاها ثابتا في الفراغ .

نفرض ان P موضع الجسم عند اللحظة t حيث $B\hat{O}P = \theta$ تتزايد بسرعة تزايدية للقرص $\dot{\theta}$ من ابتداء حسبما بالشكل .

القوى المؤثرة : (التي تعمل على تحريك الجسم)

١- $\tfrac{1}{2}mg$ وزن الجسم رأسيا الى اسفل عند P

معادلة الحركة الدورانية

$$I_0\ddot{\theta} = L_0$$

$$ma^2\ddot{\theta} = \tfrac{1}{2}mg \times a\cos\theta$$

$$a\ddot{\theta} = \tfrac{1}{2}g\cos\theta$$

$$\tfrac{1}{2}a\dot{\theta}^2 = \tfrac{1}{2}g\int\cos\theta\,d\theta = \tfrac{1}{2}g\sin\theta + Const$$

$$a\dot{\theta}^2 = g\sin\theta + C_1$$

ولكنه عند بدء الحركة

$$\theta = 0,\quad \dot{\theta} = \frac{v_0}{a} \Longrightarrow C_1 = \frac{v_0^2}{a}$$

$$\therefore a\dot{\theta}^2 = g\sin\theta + \frac{v_0^2}{a}$$

الشرط اللازم لكي تعمل المجموعة دورة كاملة هو انه تكون $\dot{\theta} > 0$ عند اعلى موضع C
ولكنه عند C تكون $\theta = \frac{3\pi}{2}$

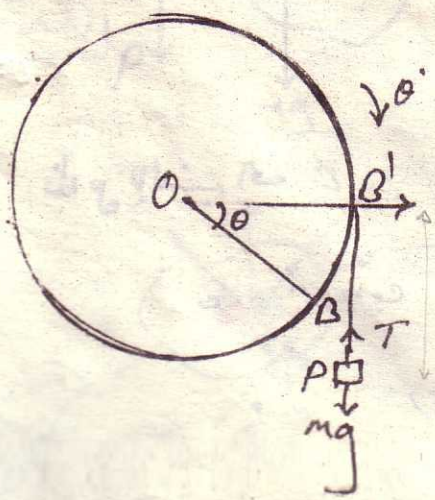
$$\therefore a\dot{\theta}^2 = g\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{v_0^2}{a} = \frac{v_0^2}{a} - g$$

وهذه القيمة تكون موجبة اذا كانت

$$\frac{v_0^2}{a} > g \Longrightarrow v_0^2 > ag$$

مثال ٣

اسطوانة دائرية مصمتة كتلتها $3m$ ونصف قطرها a يمكنها ان تدور بسهولة حول محورها المثبت في وضع افقي. لف حول الاسطوانة خيط خفيف يحمل في طرفه الحر الاخر جسيم كتلته m يتدلى رأسيا فاذا بدأت المجموعة حركتها من السكون. اثبت ان الجسيم يتحرك بعجلة ثابتة قدرها $\frac{2}{5}g$ ثم اوجد طاقة حركة المجموعة بعد 5 ثوان من بدء الحركة.



أولا: الحركة الدورانية للاسطوانة

القوى التي تعمل على اسطوانة.

T الشد في الخيط

معادلة الحركة الدورانية للاسطوانة

$$I_0\ddot{\theta} = L_0$$

$$\tfrac{3}{2}ma^2\ddot{\theta} = aT \qquad (1)$$

$I_0 = \frac{1}{2}(3m)a^2$ (Cylinder)

ثانياً : معادلة حركة الجسم

تقسيم الموضع

باختيار B' نقطة الاصل والاتجاه لأسفل اتجاهاً موجباً نفرض انه P موضع الجسم عند اللحظة t حيث $B'P = x$

القوى المؤثرة :

١- mg وزن الجسم رأسياً الى أسفل

٢- T الشد في الخيط رأسياً الى أعلى

معادلة الحركة

$$mx'' = mg - T \qquad (2)$$

هاتان المعادلتان (1),(2) لا تكفيان لتعيين المجاهيل الثلاث (θ, x, T) والمعادلة الثالثة يمكن الحصول عليها من :

الشروط الكينماتيكية : Kinematical Conditions

لاحظ ان النقطة B' هي نهاية الخيط الملفوف على البكرة عند اللحظة t وفي الوقت نفسه هي بداية الخيط الرأسي المتصل بالثقل وعلى ذلك فان سرعة النقطة B'

$V_{B'}$ (كبداية الخيط الرأسي) $= V_{B'}$ (كنهاية الخيط على البكرة)

(2) (1)

$$(2) = a\theta' = x' = (1) \qquad (3)$$

طريقة اخرى لايجاد المعادلة (3)

يمكن استنتاج العلاقة (3) بملاحظة ان بعد الرأس للجسم اسفل النقطة B' يزداد بمقدار الخيط الذي يتلف البكرة :

$$\therefore x = l + a\theta$$

$$x' = a\theta'$$

بجمع (1) و (2) نجد ان

$$\frac{3}{2}ma\theta'' + mx'' = mg$$

وبتعويض (3)

$$x'' = a\theta''$$

$$\therefore \frac{3}{2}x'' + x'' = g = \frac{5}{2}x''$$

$$\therefore a\theta'' = \frac{2}{5}g \qquad (4)$$

we integrate w.r to t to reach what is required.

نكامل بالنسبة الى t

$$a\theta' = \frac{2}{5}gt + Const$$

$$\theta' = 0 \text{ when } t = 0 \Longrightarrow Const = 0$$

$$\theta' = \frac{2g}{5a}t \qquad (5)$$

∴ بعد 5 ثوانى

$$\theta' = \frac{2g}{5a} \times 5 = \frac{2g}{a}$$

كذلك

$$x'' = \frac{2}{5}g$$

$$x' = \frac{2}{5}gt + const$$

$$x' = 0 \ , \ t = 0 \longrightarrow const = 0$$

$$x' = \frac{2}{5}gt$$

$$x' = 2g$$

بعد 5 ثوانى

طاقة حركة المجموعة = طاقة حركة الاسطوانة + طاقة حركة الجسيم

Cylindre K.E + particle K.E $= \frac{1}{2} I_0 \theta'^2 + \frac{1}{2} m x'^2 =$ Total K.E of the System.

$$= \frac{1}{2} \times 3ma^2 \times \frac{4g^2}{a^2} + \frac{1}{2} m \times 4g^2 = 5mg^2 = 8\,mg^2$$

البندول المركب : Compound Pendulum

اذا دار جسم جاسئ حول محور افقى ثابت فانه يكون ما يسمى بالبندول المركب

تعيين موضع مركز الثقل :

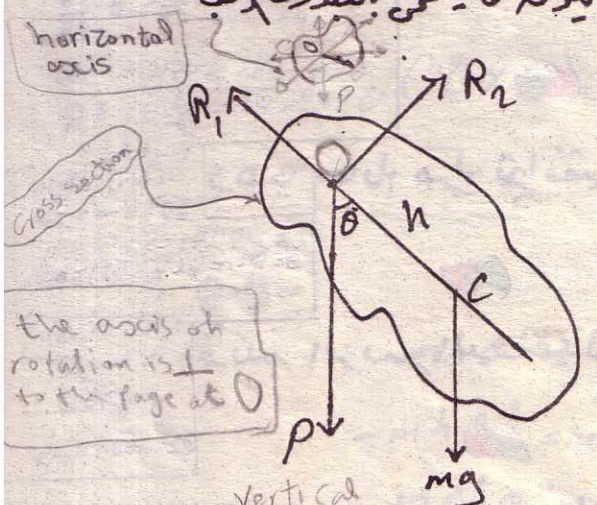
نرسم المقطع المار بمركز ثقل الجسم C عموديا على محور الدوران ويقابله فى O.

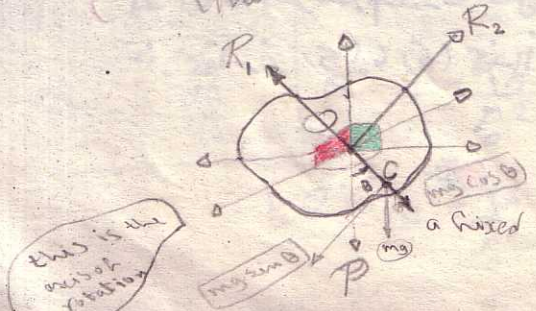
باختيار الراسى الى اسفل عند O خطا ثابتا فى الفراغ وبتعيين OC خطا ثابتا فى الجسم.

ولتفرض انه $C\hat{O}P = \theta$

لتعيين موضع الجسم عند اللحظة t باستخدام الاحداثيات القطبية حيث O قطب.

لتفرض أيضا (موضع مركز الثقل) عند اللحظة t هو $OC = h$ حيث $C \equiv (h, \theta)$





Given the center of mass we can find a plane passing through it s.t this plane is normal to the axis of rotation

$\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2, r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$ the Components of acceleration in Polar Coordinates

since $r = h = \text{Const.} \Rightarrow$

$\underline{a} = (-h\dot{\theta}^2, h\ddot{\theta})$

[1] القوى المؤثرة على الجسم :

١. mg وزنه البندول رأسي الى أسفل عند C

٢. (R_1, R_2) مركبتا رد الفعل عند المحور عند O

h = Const.

$v = h\dot{\theta} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = h\ddot{\theta}$

Linear motion of the center of mass

[2] معادلات الحركة :

(أ) الحركة الخطية (حركة مركز الثقل)

(1) transverse Component $m(h\ddot{\theta}) = R_2 - mg\sin\theta$ (1)

(2) radial Component $m(-h\dot{\theta}^2) = mg\cos\theta - R_1$ (2)

[3] (ب) الحركة الدورانية :

mass × acceleration = force

$\underline{\dot{h}} = \frac{dh}{dt} = I_O\ddot{\theta} = L_O$ (Rate of change of angular momentum)

Go To (II') Page 81-4

$\underline{mr_o^2\ddot{\theta}} = -mgh\sin\theta$ (3)

Go To Cyl. S Page 49

r_o ≡ radius of gyration about the Origin O

هذه المعادلات الثلاث تكفي لتعيين المجاهيل الثلاث $[x, y, \theta]$

Small Oscillations

[1] أولا : الذبذبات الصغيرة :

اذا كانت حركة البندول قاصرة فقط على احداث ذبذبات صغيرة، اى أن :

الزاوية θ تكون صغيرة بدرجة يمكن معها اعتبار $(\sin\theta \approx \theta)$

using (3)

$mr_o^2\ddot{\theta} = -mgh\theta$

$\therefore \ddot{\theta} = \frac{-gh}{r_o^2}\theta$ (4)

$\ddot{\theta} = -\left(\frac{gh}{r_o^2}\right)\cdot\theta$

$\omega^2 = \frac{gh}{r_o^2} \Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{gh}}{r_o}$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r_o^2}{gh}}$ (5)

$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$

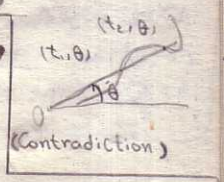
$\theta = f(t) \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{f}(t) = g(\theta)$

$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{f}(t) = \frac{dg}{d\theta}\cdot\dot{\theta} = g\frac{dg}{d\theta}$

$f: t \to \theta$ is bijective $\Rightarrow \exists f^{-1}: \theta \to t \Rightarrow$

$t = f^{-1}(\theta) \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{f}(t) = \dot{f}(f^{-1}(\theta)) = h(\theta)$

$\Rightarrow \frac{d\theta}{d\theta} = \frac{dh}{d\theta}$



وزمن الزمن الدوري لبندول بسيط طول خيطه a هو

$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ (6)

(اذا كان الزمن الدوري لكل من البندول المركب والبندول البسيط واحدا)

∴ بمقارنة (5)، (6) نجد أن

$r_o^2/gh = a/g \Rightarrow$ when $L = a$

$L = \frac{r_o^2}{h}$ (7)

(a) ولكن

Go To Page 66 [1]

$$I_O = I_C + mh^2$$

$$\therefore mr_O^2 = mr_C^2 + mh^2$$

r_C = radius of gyration about the Center of mass C

$$r_O^2 = h^2 + r_C^2 \quad (8)$$

$r_O^2 = r_C^2 + h^2$

$Lh = r_C^2 + h^2$

$L = h + \left(\frac{r_C^2}{h}\right)$

بالتعويض من (8) في (7) نجد أن

$$L = \frac{h^2 + r_C^2}{h} = h + \frac{r_C^2}{h}$$

L is the length of the equivalent simple pendulum (ESP) ∴

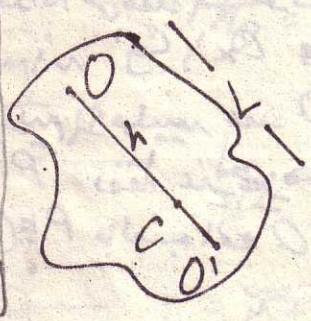
$$L = h + \frac{r_C^2}{h} \quad (9)$$

the length equivalent to that of a simple pendulum.

O' = Center of Oscillation.

O = Center of suspension

or vice-versa



(b) يسمى الطول L "بطول البندول البسيط المكافئ"
فاذا اخذنا النقطة O' على امتداد OC بحيث تكون

$$(OO' = L \;,\; CO' = \frac{r_C^2}{h} = L - h)$$

فان النقطة O' تسمى "بمركز الذبذبة"
وتسمى النقطة O "بمركز التعليق"

لاحظ أن O, O' متبادلتان اي انه اذا علق البندول من النقطة O' كانت

(i) O مركز الذبذبة وذلك لأن

$$OC \times O'C = \frac{h \times r_C^2}{h} = r_C^2 = const$$

(ii) لاحظ من (9) أن L تكون نهاية صغرى عندما

$$h = \pm r_C$$

$\frac{dL}{dh} = 1 - r_C^2 h^{-2} = 0$

$\Rightarrow r_C^2 h^{-2} = 1 \Rightarrow h^2 = r_C^2$

$h = \pm r_C$

ثانياً: تعيين R_2 من المعادلات:

(2)

$$mh\ddot{\theta} = R_2 - mg\sin\theta \quad (1)$$

$$-mh\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - R_1 \quad (2)$$

$$mr_O^2\ddot{\theta} = -mgh\sin\theta \quad (3)$$

From (3)

$$\ddot{\theta} = -\frac{gh}{r_O^2}\sin\theta \quad (3-a)$$

$$\Rightarrow \int \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \frac{gh}{r_O^2}\int -\sin\theta\, d\theta$$

$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d(d\theta/dt)}{dt}$

$\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\cdot\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{-gh}{r_O^2}\cos\theta + const \quad (10)$$

∴ from (3) in (1) $R_2 = mh\ddot{\theta} + \frac{gh}{r_O^2}\sin\theta + mg\sin\theta = mg\sin\theta\left(1 - \frac{h^2}{r_O^2}\right) = R_2$

For a simple pendulum $\ddot{\theta} = -(g/l)\cdot\theta \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{l/g} = 2\pi\sqrt{11L/7g} \Rightarrow$

$l/g = \frac{11L}{7g} \Rightarrow \boxed{l = \frac{11L}{7}}$

— M —

حيث الثابت يعين من الشروط الابتدائية للمسألة. بالتعويض من (10) في (2) نحسب الحصول على المركبة R_1، بالتعويض من (3) في (1) نحسب الحصول على R_2 ومن ذلك نحسب تعيين رد فعل المحور

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} \quad , \quad \tan\alpha = \frac{R_2}{R_1} \qquad (11)$$

فمثلاً $\ddot{\theta} = -\frac{7g}{11L}\sin\theta$ هذا هو البندول البسيط يكون $\frac{11}{7}L$

Equations of rotational motion about the Center of mass

معادلات الحركة الدورانية حول مركز الثقل: (3)

نعتبر جسماً جاسئاً يتحرك حركة مستوية، نأخذ مستوى الحركة الذي هو بمركز الثقل C ولنفرض أنه Ox, Oy محوراه

متعامداه في هذا المستوى حيث $C \equiv \tilde{x}, \tilde{y}$

لنفرض أنه Cx', Cy' محوراه موازياه للمحوريين المذكورين عند O ولنفرض أنه P نقطة عند كيفية في الجسم حيث $P \equiv (x', y')$ بالنسبة الى C، $P \equiv (x, y)$ بالنسبة الى O (a)

The body moves in a plane

The eqns of rotational motion is taken about the Center of mass

$$x = x' + \tilde{x} \quad , \quad y = y' + \tilde{y}$$

$$\therefore h_O = \text{كمية الحركة الزاوية} = \sum m (xy' - x'y)$$

$$= \sum m\left[(y' + \tilde{y}')(x' + \tilde{x}) - (x' + \tilde{x}')(y' + \tilde{y})\right]$$

$$= \sum m(y'x' - x'y') + \sum m(\tilde{y}'\tilde{x} - \tilde{x}'\tilde{y}) +$$

$$+ \sum m(\tilde{y}'x' + \tilde{x}y') - \sum m(\tilde{x}'y' + x'\tilde{y})$$

$$\therefore h_O = h_C + M(\tilde{y}'\tilde{x} - \tilde{x}'\tilde{y}) + 0$$

① taking the derivative of the two sides w.r to time (t), hence which is truly equalls to zero

* it is only the summation which is equal to zero

① Inertia of particles of the body which are fixed w.r to C

$$\sum_i m_i x' = \sum_i m_i y' = 0 \quad ,$$

② "linear momentum"

$$\sum_i m_i \dot{x}' = \sum_i m_i \dot{y}' = 0$$

$$\boxed{\underline{h}_O = \underline{h}_C + \underline{\tilde{r}} \times M\underline{\tilde{v}}}$$

$$\boxed{h_O = h_C + M(\tilde{y}'\tilde{x} - \tilde{x}'\tilde{y})}$$

Of Course, m_i, x_i are fixed w.r to C even though the whole rigid body is moving w.r to O.

The Center of mass has inertia w.r to O only. i.e

$\sum m_i x = \sum m_i(x' + \tilde{x}) = \sum m_i x' + \tilde{x}\sum m_i = 0 + M\tilde{x}$

also, $\sum m_i y = 0 + M\tilde{y}$

also in [1], [4], [2], [3] $\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{x}', \tilde{y}'$ are taken out of Σ, for they are independent of i summation index.

① about the y axis
② " x "

16 KHz tone
noise stress

$(\tilde{y}' + \tilde{y})(x' + \tilde{x}) = x'\tilde{y}' + x'\tilde{y} + \tilde{x}\tilde{y}' + \tilde{x}\tilde{y}$ (الباقي)

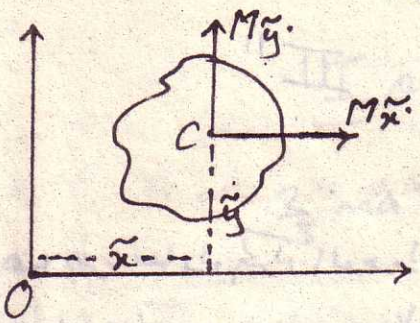
$(x' + \tilde{x})(y' + \tilde{y}) = y'x' + y'\tilde{x}^0 + \tilde{y}x' + \tilde{y}\tilde{x}$

taken out

$\therefore \sum m_i = M$ is independent of m_i

اى أن كمية الحركة الزاوية حول O = كمية الحركة الزاوية حول مركز الثقل C + كمية الحركة الزاوية لمركز الثقل نفسه باعتبار مركز الثقل نقطة مادية كتلتها تساوى الكتلة الكلية للجسم مركزه عند C ومتحركة مع مركز الثقل.

(b) وحيث ان مركز الثقل يعامل كما لو كان ثابتا



$$\therefore h_c = I_c \dot{\theta}$$

حيث $\dot{\theta}$ هى السرعة الزاوية للجسم حول مركز ثقله C
ولكن عزم I حول أى

$$h_O = h_C + M(\ddot{\tilde{y}}\tilde{x} + \dot{\tilde{y}}\dot{\tilde{x}} - \ddot{\tilde{x}}\tilde{y} - \dot{\tilde{x}}\dot{\tilde{y}}) \quad (1)$$

$$h_O = h_C + M(\ddot{\tilde{y}}\tilde{x} - \ddot{\tilde{x}}\tilde{y}) \quad (2)$$

ولكن

$$L_O = \Sigma(y_i \dot{x} - x_i \dot{y})$$

$$= \Sigma[y_i(\dot{x}' + \dot{\tilde{x}}) - x_i(\dot{y}' + \dot{\tilde{y}})]$$

$$= \Sigma(y_i \dot{x}' - x_i \dot{y}') + \dot{\tilde{x}} \underbrace{\Sigma y_i}_{(\text{force})} - \dot{\tilde{y}} \underbrace{\Sigma x_i}_{(\text{force})}$$

$\Sigma y_i = M\ddot{\bar{y}}$
$\Sigma x_i = M\ddot{\bar{x}}$

$$L_O = L_C + \tilde{x} \times M\ddot{\tilde{y}} - \tilde{y} \times M\ddot{\tilde{x}} \quad (3)$$

ولكن معادلة الحركة الدورانية II هى

$$h_O = L_O$$

$\dot{h}_c = L_c$

من (3) و (2) نجد أن

$$h_C = L_C$$

i.e The rate of change of angular momentum about the center of mass C = the algebraic sum of moments about C.

Which means that the center of mass is dealt with as if it is a fixed point, when we start to study the rotational motion

اى ان معدل تغير كمية الحركة الزاوية حول مركز الثقل C = المجموع الجبرى للعزوم حول C
وهذا يؤكد ان مركز الثقل يعامل كما لو كان نقطة ثابتة عند دراسة الحركة الدورانية ولذلك يمكننا وضع h_C على الصورة

$$h_C = I_C \dot{\theta}$$

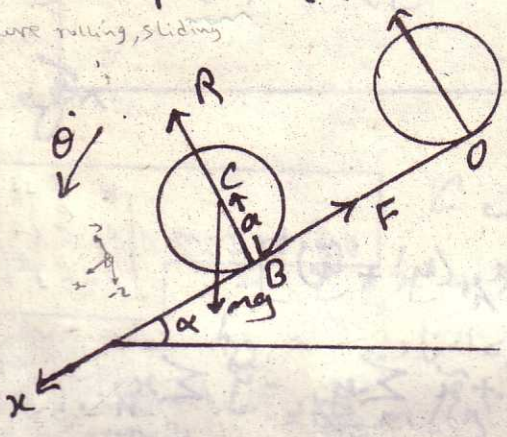
∴ المعادلة II تأخذ الصورة

$$\boxed{I_C \ddot{\theta} = L_C} \qquad II''$$

وهذه هي معادلة الحركة الدورانية للجسم حول مركز ثقله وتكون
السرعة الزاوية للجسم حول مركز ثقله = $\dot{\theta}$

مثال ١

وضعت كرة منتظمة مصمتة على مستوى خشن يميل على الأفق بزاوية α فإذا بدأت الكرة حركتها من سكون. أوجد الشرط اللازم لحدوث دحرجة بحتة. ثم أوجد متى يبدأ الانزلاق.



pure rolling, sliding

I- 1st **نقطة مركز الثقل:**

باختيار نقطة التماس الابتدائية O نقطة الأصل، Ox من اتجاه الخط الأكبر ميل للمستوى المائل، Oy من اتجاه العمودي على المستوى

نفرض أن $C \equiv (x, a)$

∴ سرعة مركز الثقل $\equiv (\dot{x}, 0)$

، عجلة مركز الثقل $\equiv (\ddot{x}, 0)$

II- 2nd **القوى المؤثرة:**

نفرض أن الحركة سوف تبدأ بدحرجة بحتة وفي هذه الحالة تكون قوة الاحتكاك مجهولة مقداراً واتجاهاً. نفرض أن مقدارها F وتميل إلى أعلى المستوى

(أ) mg وزن الكرة رأسياً إلى أسفل

(ب) R رد الفعل العمودي في اتجاه BC

(ج) F قوة الاحتكاك إلى أعلى المستوى

3rd **معادلات الحركة:**

(أ) **حركة مركز الثقل:**

Motion of the Centre of mass

$$m\ddot{x} = mg \sin\alpha - F \qquad (1)$$

$$m(0) = R - mg\cos\alpha \qquad (2)$$

Motion about the Centre of mass.

(أ) الحركة حول مركز الثقل :

لتكن السرعة الزاوية للكرة حول مركزها C عند اللحظة t هي $\dot{\theta}$ في الاتجاه المبين بالرسم . نعلم أن مركز الثقل كنقطة ثابتة

$$I_C \ddot{\theta} = L_C$$

$$\frac{2}{5} ma^2 \ddot{\theta} = Fa \qquad (3)$$

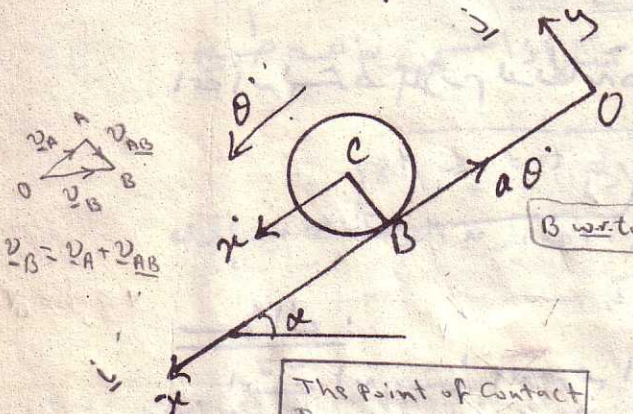
وتكون عدد المجاهيل هي (x, θ), (F, R)

∴ المعادلات الثلاث السابقة لا تكفي لتعيين هذه المجاهيل الأربع والمعادلة الرابعة نحصل عليها من :

(ب) الشروط الكينماتيكية : (Looks) 4th

Kinematical Conditions

حيث أن الحركة تتم بحيث تظل الكرة على تلامس مستمر مع نقطة التماس B



(السرعة المطلقة للكرة) = (السرعة المطلقة للمستوى)

∴ v_B (السرعة المطلقة للكرة) = v_B (السرعة المطلقة للمستوى)

وتكون v_B (السرعة المطلقة للكرة) = $v_{B\to C} + v_C$ (السرعة المطلقة للمستوى)

$$(a\dot{\theta}) + \dot{x} =$$

$$-a\dot{\theta} + \dot{x} =$$

B w.r.to C

The point of Contact B on the plane have velocity w.r.to C $v_{B\to C} = -a\dot{\theta}\,\underline{i}$

the point of Contact B is always a point of the plane which is not moving ⇒ Velocity of the Point of Contact $v_B = 0$

v_B (السرعة المطلقة للمستوى) = صفر لأن المستوى ثابت

we want the kinematics to be pure rotational ⇒ v_B (Contact) = 0 .

$$\dot{x} - a\dot{\theta} = 0 \qquad (4)$$

$$\dot{x} = a\dot{\theta} \qquad (5)$$

$$R = mg\cos\alpha$$

the kinematics of the situation is similar to a sphere rotating about its centre of mass, the only different thing here is that the rotation here is performed while the centre of mass is moving hence the emergence of $\dot{x}$ and (4)

Even though the sphere is moving on the plane v_B (plane) = 0 i.e is not moving.

بحذف F بين (1) ، (3)

$$m\ddot{x} + \frac{2}{5} ma\ddot{\theta} = mg\sin\alpha$$

وبتكامل (4)

$$m\ddot{\theta} = \ddot{x}$$

$$\therefore m\ddot{x} + \frac{2}{5} m\ddot{x} = mg\sin\alpha$$

$$\ddot{x} = \frac{5}{7} g\sin\alpha \qquad (6)$$

$$a\ddot{\theta} = \ddot{x} = \frac{5}{7} g \sin\alpha \quad (7)$$

$$\therefore F = \frac{2}{5} ma\ddot{\theta} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{7} mg \sin\alpha$$

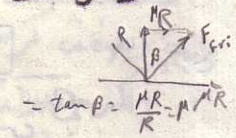
$$\therefore F = \frac{2}{7} mg \sin\alpha \quad (8)$$

الشرط اللازم لحدوث هذه الحركة البحتة:

لاحظ انه يمكن حدوث حركة بحتة اذا كان الاحتكاك كافي لمنع الانزلاق.

وفي هذه الحالة يجب أن تكون

Condition for Pure rotational motion $F \leq \mu R$



$$\therefore \frac{2}{7} mg \sin\alpha \leq \mu mg \cos\alpha$$

اي ان الشرط اللازم لحدوث حركة بحتة في هذه الحالة هو:

$$\mu \geq \frac{2}{7} \tan\alpha \qquad \frac{2}{7}\tan\alpha \leq \mu$$

سؤال:

اثبت ان شرط الحركة البحتة في الحالات الآتية كما هو مبين امام كل منها:

١- كرة مجوفة $\Leftarrow$ $\mu \geq \frac{2}{5} \tan\alpha$

٢- اسطوانة مصمتة او قرص $\Leftarrow$ $\mu \geq \frac{1}{3} \tan\alpha$

٣- اسطوانة مجوفة (انبوبة او حلقة) $\Leftarrow$ $\mu \geq \frac{1}{2} \tan\alpha$

تصنيف انواع الحركة:

توجد نوعان للحركة لجسم على مستوى خشن وهما:

Conditions to be satisfied

Pure Rotation

١- **حركة تدحرج بحتة:**

(أ) تكون قوة الاحتكاك كافي لمنع الانزلاق

(ب) اي ان $F < \mu R$ وتكون مجهولة في المقدار والاتجاه

وتكون قوة في الاتجاه المضاد للاتجاه المحتمل للانزلاق.

(ج) في هذه الحالة يحتمل بدء الانزلاق عندما $F = \mu R$

Pure Sliding motion.

٢- حركة تدحرجية انزلاقية :

وفى هذه الحالة يكون الاحتكاك نزيا حتى كاف لمنع الانزلاق .
اى انه فى هذه الحالة يتحدد الاحتكاك تماما من المقدار وفى الاتجاه .

(أ) من حيث المقدار $\Leftarrow$ $F = \mu R$

(ب) من حيث الاتجاه $\Leftarrow$ الاتجاه المضاد لاتجاه الانزلاق (اى انزلاق B)
اى فى الاتجاه المضاد لسرعة نقطة التماس "Point of Contact" $V_B \neq 0$ $V_B = V_0$

(ج) فى هذه الحالة يبدأ الدحرجة البحتة عند ما تصبح $V_B = 0$ اذا سمحت طبيعة المسألة لذلك .

تصنيف الحركة :

يمكن تصنيف نوع الحركة ما اذا كانت من النوع الأول او من النوع الثانى بدراسة سرعة نقطة التماس عند بدء الحركة :

How to determine the kind of motion according to initial Conditions ?

(١) اذا كانت $V_B = 0$ (1) ("Could be rotational")

فى هذه الحالة يمكن ان تكون الحركة تدحرجية بحتة اذا سمحت بذلك طبيعة المستوى والجسم المتحرك عليه .

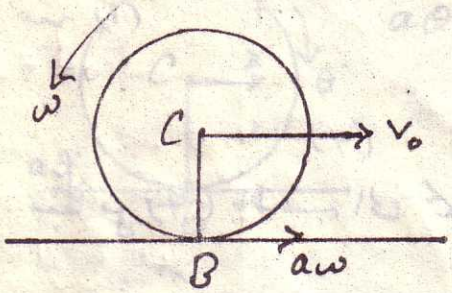
(٢) اذا كانت $V_B \neq 0$ (2) ("Sliding")

فى هذه الحالة لابد ان تبدأ المسألة بانزلاق . اى يكون الاحتكاك يساوى μR فى اتجاه عكس V_B عند بدء الحركة .

مثال ٢

Sep. 90

قذفت اسطوانة دائرية وصفته على نضد افقى خشن بسرعة ابتدائية V_0 فى اتجاه محمودى على محور الاسطوانة الى اليمين ، وسرعة زاوية ω فى الاتجاه المضاد لحركة عقرب الساعة . اثبت ان الاسطوانة تعود الى الوضع الذى قذفت منه اذا كانت $a\omega > 2V_0$ ثم اوجدت تبدأ الدحرجة البحتة وأين الاسطوانة تصل فعلا الى الوضع الذى قذفت منه قبل ان تبدأ الدحرجة البحتة اذا كان $a\omega < 5V_0$.



أولا : عند بدء الحركة :

1st

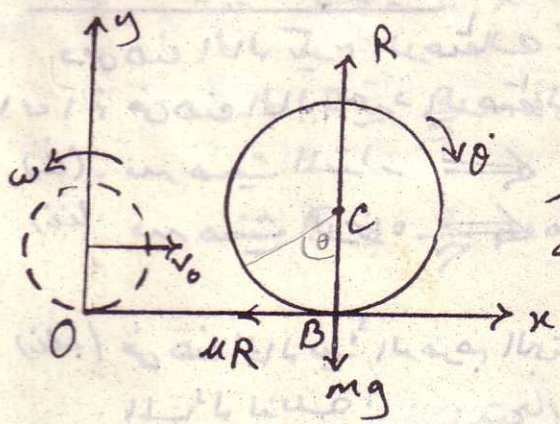
$$V_B = V_C + V_{B/C}$$ initial Condition

$$= V_0 + a\omega \neq 0$$

واتجاهها الى اليمين

∴ الحركة تبدأ بانزلاق

∴ الاحتكاك $= \mu R$ واتجاهه الى اليسار



ثانيا : الحركة التدحرجية الانزلاقية : 2nd

I- تعيين موضع مركز الثقل :

باختيار موضع الابتدائي لنقطة التماس نقطة للأصل و الاتجاه الموجب لليمين محور للسينات و الرأس عند O محورا للصادات نرمز أ بـ $C \equiv (x, a)$

II- القوى المؤثرة :

① mg وزنه الاسطوانة رأسيا الى أسفل

② R رد فعل المستوى رأسيا الى أعلى

③ μR قوة الاحتكاك في اتجاه Ox (الى اليسار)

III- معادلات الحركة :

1- حركة مركز الثقل :

$$m\ddot{x} = -\mu R \qquad (1)$$

$$m\ddot{x}(0) = R - mg \qquad (2)$$

2- الحركة حول مركز الثقل :

$$I_C \ddot{\theta} = L_C$$

L_C is in the direction of increase of θ
$\Rightarrow L_C$ is (+ve)

$$\frac{1}{2} m a^2 \ddot{\theta} = \mu R a \qquad (3)$$

هذه المعادلات الثلاث كافية تماما لتعيين المجاهيل الثلاث x, a, R

من (2)

$$R = mg$$

من (1)

$$m\ddot{x} = -\mu mg$$

$$\ddot{x} = -\mu g \qquad (4)$$

بتكامل (4) بالنسبة الى t

$$\dot{x} = -\mu g t + Const$$

ولكن عند بدء الحركة $\dot{x} = v_0$ عندما $t = 0$ $\Longleftarrow$ $Const = v_0$

$$\dot{x} = v_0 - \mu g t \qquad (5)$$

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} \mu g t^2 + Const$$

we integrated twice to know when the cylinder returns back to its initial position.

ولكنه عند بدء الحركة $x=0$ عندما $t=0 \Longleftarrow$ Const $=0$

$$\therefore x = v_0 t - \tfrac{1}{2}\mu g t^2 \qquad (6)$$

من (3)

$$\tfrac{1}{2} m a\ddot{\theta} = \mu m g$$

$$\therefore a\ddot{\theta} = 2\mu g \qquad (7)$$

بتكامل (7) بالنسبة للزمن

$$a\dot{\theta} = 2\mu g t + \text{Const}$$

ولكنه عند بدء الزمن $\dot{\theta} = -\omega \Longleftarrow t=0$ عندما $\text{Const} = -a\omega$

$$\therefore a\dot{\theta} = 2\mu g t - a\omega \qquad (8)$$

3rd سرعة امكانية عودة الاسطوانة الى الموضع الذى قذفت منه !

For the Cylendre to return back to its initial position.

(i) من الواضح انه لكى تعود الاسطوانة الى الموضع الذى قذفت منه يجب أولا : انه يتوقف مركز ثقلها عن الحركة ، ولكنه مركز الثقل C يتوقف عن الحركة عندما $\dot{x} = 0$

$$\therefore \text{من (5)} \quad v_0 - \mu g t = 0$$

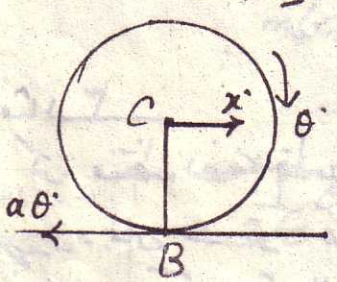
$$\therefore t = \frac{v_0}{\mu g}$$

(ii) ثانيا : يجب ان تكون سرعة الزاوية $\dot{\theta}$ فى هذه اللحظة سالبة كى يمكن ان تعود الاسطوانة الى الخلف .

ولكن من (8): السرعة الزاوية للاسطوانة فى هذه اللحظة تكون :-

$$a\dot{\theta} = 2\mu g \times \frac{v_0}{\mu g} - a\omega$$

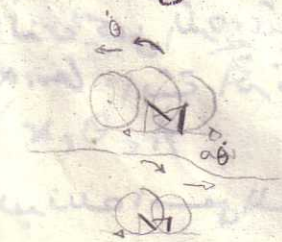
$$= 2v_0 - a\omega$$



وهذه القيمة تكون سالبة اذا كانت

$$2v_0 < a\omega$$

4th متى تبدأ الحركة البحتة ؟ : When pure rotation begins?



$$v_B = v_C + v_{B\to C}$$

$$= \dot{x} - a\dot{\theta}$$

$$= v_0 - \mu g t - 2\mu g t + a\omega$$

$$v_B = v_0 - 3\mu g t + a\omega \quad (9)$$

(i) الصندوق الجديد يبدأ عندما

$$v_B = 0$$

اى عندما

$$v_0 - 3\mu g t + a\omega = 0$$

اى عندما

$$t_1 = \frac{v_0 + a\omega}{3\mu g}$$

(ii) الاسطوانة تعود فقط الى الوضع الذى بدأت منه عندما $x = 0$. اى عندما

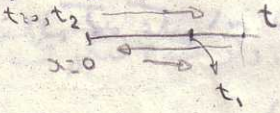
$$v_0 t - \tfrac{1}{2}\mu g t^2 = 0$$

$$t\left(v_0 - \tfrac{1}{2}\mu g t\right) = 0$$

$$t_2 = \frac{2v_0}{\mu g}$$

(iii) والشرط المطلوب يتحقق اذا كانت

at $x = 0$ $t_2 < t_1$ at $x(t_1)$

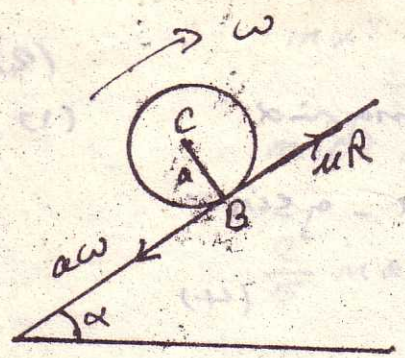


$$\frac{2v_0}{\mu g} < \frac{v_0 + a\omega}{3\mu g}$$

$$6v_0 < v_0 + a\omega \implies 5v_0 < a\omega$$

مثال ٣ May 91

كرة منتظمة نصف قطرها a تدور بسرعة زاوية ω حول قطر افقى فيها . وضعت بهدوء على مستوى خشن يميل على الافقى بزاوية α فاذا كانت ω فى الاتجاه الذى يجعل الكرة تتدحرج للصعود على المستوى وكانت μ بين المستوى والكرة تساوى $\tan\alpha$ اثبت ان مركز الكرة يظل ساكنا لمدة تساوى $\frac{2a\omega}{5g\sin\alpha}$ ثم تتدحرج الكرة لاسفل المستوى بعجلة منتظمة قدرها $\frac{5}{7}\sin\alpha$.



1st أولا : عند بدء الحركة

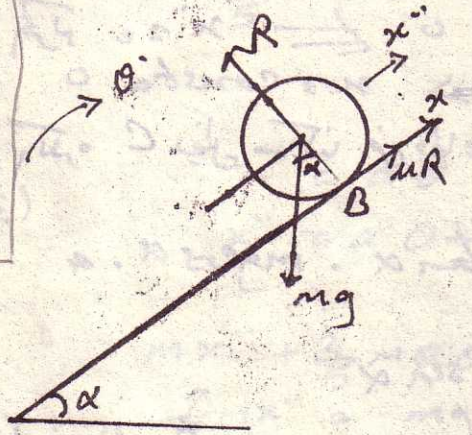
$$v_B = v_C + v_{B\to C}$$

$$= 0 + a\omega$$

$$\therefore v_B = a\omega \quad (\text{down}) \Rightarrow \mu R \text{ must be up in the opposite direction to } v_B$$

$$v_B \neq 0$$

ie at $x=0$ the sphere slides while its center of mass C is at $x=0$, ie C doesn't move



∴ الاحتكاك يكون نحو اليمين والحركة بدأت بالاتجاه اي ان الاحتكاك = μR الى اعلى المستوى

2nd ثانيا : حركة الكرة (على المستوى)

I - تعيين موضع مركز الثقل :

باختيار نقطة التماس البدائية O نقطة للأصل واتجاه المستوى الى اعلى [الخط الأكبر ميل في المستوى] محورا للسينات والعمودي عليه O_y محورا للصادات. نفرض أن $C = (x, a)$ موضع مركز الكرة عند اللحظة t

II - القوى المؤثرة على الكرة :

١- mg وزن الكرة رأسيا الى أسفل

٢- R رد الفعل العمودي للمستوى

٣- μR الاحتكاك الى اعلى المستوى

III - معادلات الحركة :

١- حركة مركز الثقل :

$$m\ddot{x} = \mu R - mg\sin\alpha \qquad (1)$$

$$m(0) = R - mg\cos\alpha \qquad (2)$$

٢- الحركة الدورانية حول مركز الثقل

L_C increases in the opposite direction to the increase of θ

$$I_C\ddot{\theta} = L_C$$

$$\frac{2}{5}ma^2\ddot{\theta} = -\mu Ra \qquad (3)$$

(x, θ, R) هذه المعادلات الثلاث تكفي لتعيين المجاهيل الثلاث وهي

$R = mg\cos\alpha$ (2) معـ

$m\ddot{x} = \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha$ (1) معـ

$\ddot{x} = \tan\alpha \cdot g\cos\alpha - g\sin\alpha$

$\ddot{x} = 0$ (4)

$\dot{x} = const$

عند بدء الحركة $\dot{x} = 0 \Leftarrow const = 0$

$\dot{x} = 0$ (5) $\Rightarrow x = const = 0$

∴ مركز الكرة C يظل ساكناً في مكانه.

معـ (3)

$\frac{2}{5}ma^2\ddot{\theta} = -\tan\alpha \cdot mg\cos\alpha \cdot a$

$a\ddot{\theta} = -\frac{5}{2}g\sin\alpha$

نكامل بالنسبة الى t

$a\dot{\theta} = -\frac{5}{2}g\sin\alpha \cdot t + c$

وتكون $\dot{\theta} = \omega$ عندما $t = 0 \Leftarrow c = a\omega$

$\therefore a\dot{\theta} = a\omega - \frac{5}{2}g\sin\alpha \cdot t$ (7)

ومن الواضح انه مركز الكرة C يظل ساكناً في مكانه الى انه تتلاشى السرعة الزاوية $\dot{\theta}$ اذ أنه سوف تعكس اتجاهها بعد ذلك.

وتكون معـ (7) عندما $\dot{\theta} = 0$

$a\omega - \frac{5}{2}g\sin\alpha \cdot t = 0$

اى $t = \frac{2a\omega}{5g\sin\alpha}$

The new equations of motion.

ثالثاً: الحركة التدحرجية أسفل المستوى 3rd

وهي انه $v_B = v_C + v_{B\to C}$

$v_B = \dot{x} - a\dot{\theta}$

عند بدء الحركة التدحرجية: $x = 0$ و $\theta = 0$ عند بداية هذه المرحلة initially

∴ $v_B = 0$

∴ نوع الحركة هنا: تدحرجية بحتة

$$m\ddot{x} = -R + mg\sin\alpha \qquad (1)$$

$$m(0) = R - mg\cos\alpha$$

$$\frac{2}{5}ma^2\ddot{\theta} = +Fa$$

$$\frac{2}{5}ma\ddot{\theta} = F \qquad (2)$$

الشروط الكينماتيكية :

$$\dot{x} = a\dot{\theta}$$
$$\ddot{x} = a\ddot{\theta}$$

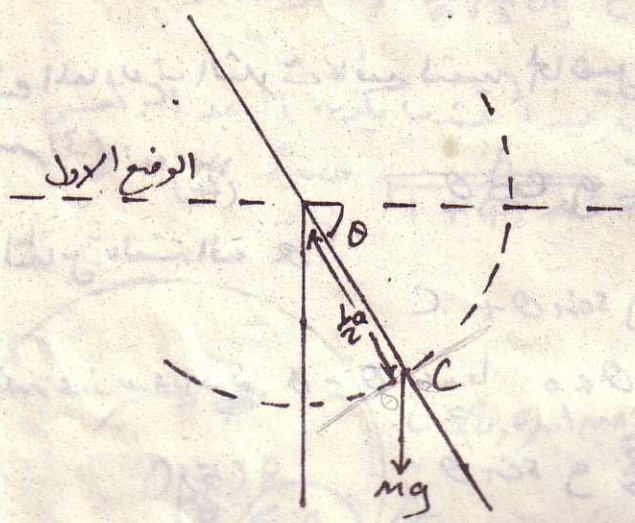
بجمع (1) و (2)

$$m\ddot{x} + \frac{2}{5}ma\ddot{\theta} = mg\sin\alpha$$
$$\frac{7}{5}m\ddot{x} = mg\sin\alpha$$
$$\ddot{x} = \frac{5}{7}g\sin\alpha$$

Expected in Sep. 1991

مثال ٤

قضيب منتظم طوله $2a$ وضع عموديا على حافة نضد بحيث كان مركز ثقله فابع النضد وعلى بعد $\frac{1}{2}a$ من حافته . اوجد متى ينزلق القضيب على حافة النضد :



I- موضع مركز الثقل

باستخدام الاحداثيات القطبية

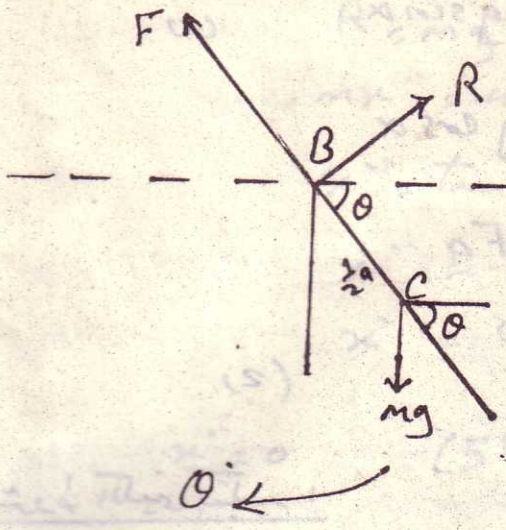
باعتبار نقطة التماس B قطبا

نفرض أن $C \equiv (\frac{1}{2}a, \theta)$

$\therefore$ عجلة مركز الثقل $\equiv C$

$(-\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2, \frac{1}{2}a\ddot{\theta})$

في اتجاه $\overrightarrow{BC}$ والاتجاه العمودي عليه حيث θ تزايد



II- تعيين القوى المؤثرة : 2nd

١- mg وزن القضيب رأسياً إلى أسفل

٢- F قوة الاحتكاك في اتجاه إلى أعلى

٣- R رد الفعل العمودي عمودياً على القضيب

III- معادلات الحركة : 3rd

١- حركة مركز الثقل (i)

$$m(-\tfrac{1}{2}a\dot{\theta}^2) = mg\sin\theta - F \quad (1)$$

$$m(\tfrac{1}{2}a\ddot{\theta}) = mg\cos\theta - R \quad (2)$$

in the direction of increasing θ.

٢- الحركة الدورانية حول مركز الثقل : (ii)

وحيث أن النقطة B تظل ثابتة أثناء الحركة

∴ يكون دوران الحركة الدورانية حول B

السرعة الزاوية للقضيب حول B = $\dot{\theta}$

$$I_B\ddot{\theta} = L_B$$

ولكن

$$I_B = I_C + m(\tfrac{1}{2}a)^2$$

$$= \frac{1}{3}ma^2 + \frac{1}{4}ma^2 = \frac{7}{12}ma^2$$

$$\frac{7}{12}ma\ddot{\theta} = mg \times \tfrac{1}{2}a\cos\theta \quad (3)$$

من المعادلات الثلاث كافية لتعيين المجاهيل الثلاثة وهي (F, R, θ)

من (3)

$$a\ddot{\theta} = \frac{6}{7}g\cos\theta \quad (4)$$

بالتكامل بالنسبة الى θ

$$\tfrac{1}{2}a\dot{\theta}^2 = \frac{6}{7}g\sin\theta + C$$

ولكن عند بدء الحركة $\dot{\theta} = 0$ عندما $\theta = 0$ $\Longleftarrow$ $C = 0$

$$\therefore a\dot{\theta}^2 = \frac{12}{7}g\sin\theta \quad (5)$$

بالتعويض من (4) في (2) نجد أن

$$R = mg\cos\theta - \tfrac{1}{2}ma\ddot{\theta}$$

$$R = mg\cos\theta - \frac{3}{7}mg\cos\theta$$

$$\therefore \quad R = \frac{4}{7}mg\cos\theta$$

بالتعويض من (5) في (1) نجد أن

$$F = mg\sin\theta + \frac{1}{2}ma\dot{\theta}^2$$

$$= mg\sin\theta + \frac{6}{7}mg\sin\theta$$

$$\therefore F = \frac{13}{7}mg\sin\theta$$

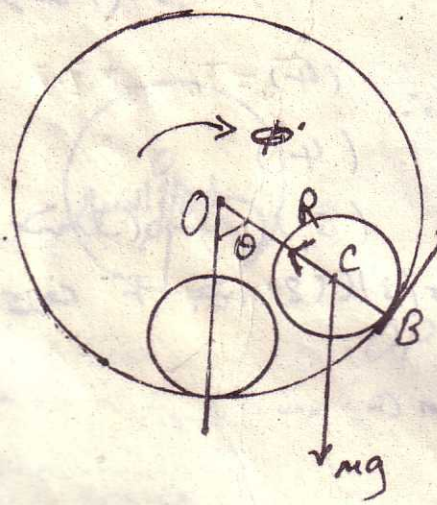
(iii) ولكن الاتزلاق يبدأ عندما $F = \mu R$

$$\therefore \frac{13}{7}mg\sin\theta = \frac{4}{7}\mu mg\cos\theta$$

اى عندما $\tan\theta = \frac{4}{13}\mu$

+ **مثال ٥**

اسطوانة مصمتة منتظمة نصف قطرها a وصفت بداخل انبوبة دائرية نصف قطرها $a+b$ مثبتة بحيث يكون محورها افقيا فاذا وصفت الاسطوانة بلامس لأسفل زاوية من الانبوبة واعطيت سرعة زاوية $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{4}{3}bg}$ حول محورها وبدأت الحركة بدحرجة بحتة. فاثبت ان الاتزلاق يبدأ عندما يكون البعد الرأسي لمحور الاسطوانة اسفل محور الانبوبة $\frac{b}{\sqrt{1+49\mu^2}}$ حيث μ معامل الاحتكاك بين الاسطوانة والانبوبة.



the cylindre does not prefer to move up

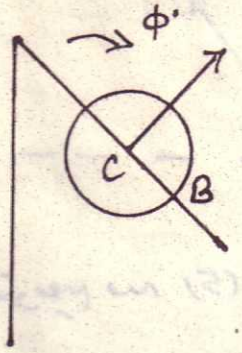
the cylindre tends to roll down

I- موضع مركز الثقل

باستخدام الاحداثيات القطبية نفرض ان $C \equiv (b, 0)$ هو موضع مركز الاسطوانة عندما $\theta = 0$

وعليه موضع مركز الثقل $C \equiv (-b\dot{\theta}^2, b\ddot{\theta})$

2nd II- القوى المؤثرة :



١- mg وزن الاسطوانة رأسيا الى اسفل
٢- R رد فعل المنبوذ في اتجاه OB
٣- F قوة الاحتكاك في اتجاه المماس مشتركة الى اعلى

3rd III- معادلات الحركة : Equations of motion

(i) ١- حركة مركز الثقل Linear motion of the Center of mass

$$m(-b\dot{\theta}^2) = mg\cos\theta - R \quad (1)$$

$$mb\ddot{\theta} = F - mg\sin\theta \quad (2)$$

(ii) ٢- الحركة حول مركز الثقل Rotational motion about the Center of mass

تقوم الاسطوانة بدوران زاوي حول محورها عند اللحظة t $\dot{\phi}$ في اتجاه عقربة الساعة كما بالرسم

$L_c = -I_c\ddot{\varphi}$ (-ve)

$$I_c\ddot{\phi} = L_c$$

$$\frac{1}{2}ma^2\ddot{\phi} = -Fa \quad (3)$$

هذه المعادلات الثلاث لا تكفي لتعيين المجاهيل الأربع (θ, ϕ, R, F).

المعادلة الرابعة نحصل عليها من :

4th ٤- الشروط الكينماتيكية Kinematical Conditions

∵ الحركة تدحرجية بحتة

∴ سرعة نقطة التماس B لجزء من الاسطوانة = سرعة جزء من المنبوذ.

وكذلك V_B (لجزء من الاسطوانة) $= V_C + V_{B\to C}$

$$= b\dot{\theta} + (-a\dot{\phi})$$

$$V_B = V_C + V_{B\to C}$$
(1) Velocity due to the linear part of C
(2) Velocity due to the rotational part about C

$$= b\dot{\theta} - a\dot{\phi}$$

V_B (لجزء من المنبوذ) $= 0$ (لأنه المنبوذ ساكنة اي ثابتة)

$$\therefore b\dot{\theta} - a\dot{\phi} = 0 \quad (4)$$

$$b\ddot{\theta} = a\ddot{\phi} \quad (4')$$

$$\frac{1}{2}ma\ddot{\phi} = -F \quad (3') \quad (3) \text{ من}$$

بحذف F بين (2) و (3') نجد أن

$$mb\ddot{\theta} + \frac{1}{2}ma\ddot{\phi} = -mg\sin\theta$$

من (4)

$$b\ddot{\theta} + \frac{1}{2}b\ddot{\theta} = -g\sin\theta$$

$$b\ddot{\theta} = -\frac{2}{3}g\sin\theta \qquad (5)$$

نكامل بالنسبة الى θ

$$\frac{1}{2}b\dot{\theta}^2 = \frac{2}{3}g\cos\theta + c \qquad (6)$$

وبكون $\dot{\theta} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{4}{3}bg}$ عندما $\theta = 0 \Longleftarrow$ $b\dot{\theta} = \sqrt{\frac{4}{3}bg}$

$$\therefore \frac{1}{2}b\left(\frac{1}{b}\sqrt{\frac{4}{3}bg}\right)^2 = \frac{2}{3}g + c$$

$$\therefore c = \frac{1}{2b} \times \frac{4}{3}bg - \frac{2}{3}g = 0$$

من (6)

$$b\dot{\theta}^2 = \frac{4}{3}g\cos\theta$$

بالتعويض من (5) في (2) نجد ان

$$F = mb\ddot{\theta} + mg\sin\theta$$

$$= -\frac{2}{3}mg\sin\theta + mg\sin\theta$$

$$F = \frac{1}{3}mg\sin\theta \qquad (8)$$

كذلك من (1)

$$R = mg\cos\theta + mb\dot{\theta}^2$$

$$= mg\cos\theta + \frac{4}{3}mg\cos\theta$$

$$R = \frac{7}{3}mg\cos\theta$$

وحيث ان الاتزلاق يبدأ عندما $F = \mu R$ (9)

$$\therefore \frac{1}{3}mg\sin\theta = \frac{7}{3}mg\cos\theta \cdot \mu$$

$$\tan\theta = 7\mu$$

الاتزلاق يبدأ عندما

البعد الرأسي $= OP = b\cos\theta$

$$OP = b \times \frac{1}{\sqrt{1+49\mu^2}}$$

$$\therefore \text{البعد الرأسي} = \frac{b}{\sqrt{1+49\mu^2}}$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + 49\mu^2$

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+49\mu^2}}$

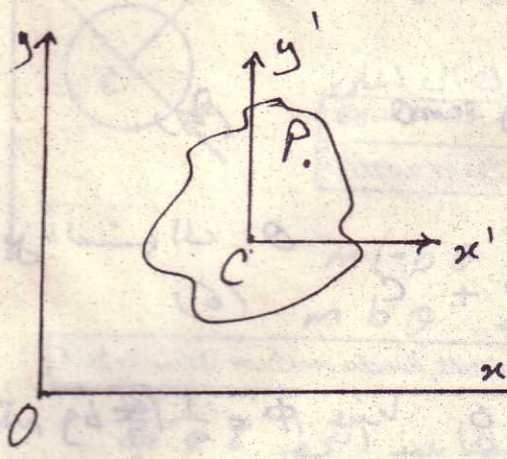
قاعدة الشغل والطاقة

The Principle of Work and Energy

The Kinetic energy of a rigid body w.r.to an arbitrary origin.

١- طاقة حركة جسم جاسئ بالنسبة لنقطة اصل ،

نعتبر جسما جاسئ يتحرك حركة مستوية ونفرض انه محور اسه متعامد اسه في مستوى حركة مركز ثقله C ونفرض انه (Cx', Cy') محور اسه يوازي بالسه المحورين الاصليين (Ox, Oy). حيث $C \equiv (\tilde{x}, \tilde{y})$ بالنسبة الى O.



نفرض أن P نقطة عنصرية من الجسم كتلتها m وموضعها عند اللحظة t هو ،

بالنسبة الى O	$P \equiv (x, y)$
بالنسبة الى C	$P \equiv (\tilde{x}, \tilde{y})$

$\therefore x = x' + \tilde{x}$, $y = y' + \tilde{y}$

فيكون طاقة حركة هذا الجسم بالنسبة الى O :

Kinetic energy of the rigid body, about O

$$T_O = \sum \tfrac{1}{2} m (x'^2 + y'^2)$$

$$= \sum \tfrac{1}{2} m \left[(x' + \tilde{x})^2 + (y' + \tilde{y})^2 \right]$$

$$= \sum \tfrac{1}{2} m \left[x'^2 + 2x'\tilde{x} + \tilde{x}^2 + y'^2 + 2y'\tilde{y} + \tilde{y}^2 \right]$$

$$= \sum \tfrac{1}{2} m \left[(x'^2 + y'^2) + 2\tilde{x}x' + 2\tilde{y}y' + (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) \right]$$

$$= \sum \tfrac{1}{2} m (x'^2 + y'^2) + \tilde{x} \sum m x' + \tilde{y} \sum m y' + (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) \sum \tfrac{1}{2} m$$

$$= T_C + 0 + 0 + \tfrac{1}{2} M (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)$$

$\sum_{+i} m_i \dot{r}_i = 0$

$\sum_{+i} m_i \dot{x}_i = 0$

$\sum_{+i} m_i \dot{y}_i = 0$

only $\sum_{+i} \square = 0$

$$\boxed{T_O = T_C + \tfrac{1}{2} M (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)}$$

$T_O = T_C + \frac{1}{2} M \bar{v} \cdot \bar{v}$

حيث $T_C = \tfrac{1}{2} I_C \dot{\theta}^2$

$\dot{\theta}$ السرعة الزاوية للجسم حول مركز ثقله C

$\therefore$ [طاقة حركة الجسم بالنسبة الى نقطة O = طاقة حركته بالنسبة لمركز ثقله C + طاقة حركة C نفسه]

٢- نظرية الشغل والطاقة : The Principle of Work and Energy :

معادلات حركة النقطة P

$$F_x = m\ddot{x} = X_c + X_e \quad (1)$$

$dW = \underline{F} \cdot d\underline{r}$
$d\underline{r} = (dx, dy, 0)$, $\underline{F} = (F_x, F_y, 0)$

$$F_y = m\ddot{y} = Y_c + Y_e \quad (2)$$

بالضرب المعادلة (1) فى δx والمعادلة (2) فى δy والجمع لجميع نقط الجسم نجد أن

$$\sum m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y) = \sum X_c \delta x + Y_c \delta y) + \sum X_e \delta x + Y_e \delta y)$$

∵ مجموع القوى الداخلية مجموعة متزنة

∴ الشغل الذى تبذله فى الازاحة الصفرية $(\delta x, \delta y) = 0$ The Work done =

اى أن

$$\sum m(X_c \delta x + Y_c \delta y) = 0$$

$$\sum m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y) = \sum X_e \delta x + Y_e \delta y)$$

$$= \delta W \quad (3)$$

حيث δW هو عنصر الشغل الذى تبذله مجموعة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم وتكافئ سرعة النقطة $P \equiv (x, y)$

فاذا كانت الازاحة الصفرية $(\delta x, \delta y)$ قد حدثت فى فترة زمنية قصيرة δt

$$\therefore \delta x = \dot{x}\,\delta t \ ,$$

$$\delta y = \dot{y}\,\delta t$$

$$\therefore \ddot{x}\delta x = \ddot{x}\,\dot{x}\,\delta t = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right).\delta t = \delta\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right)$$

كذلك

$$\ddot{y}\,\delta y = \delta\left(\frac{1}{2}\dot{y}^2\right)$$

∴ المعادلة (3) تأخذ الصورة

$$\delta \sum \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \delta W$$

$$\delta T = \delta W$$

American Cable News Network

$W = T' - T_0$

بالتكامل

$$[T]_0^t = [W]_0^t$$

$$T' - T_0 = W$$

Work done = Change in Kinetic energy

Impulse is a transient quantity used to describe the transient state of the body.

∴ التغير في طاقة الحركة = الشغل المبذول

Uniplanar motion of a rigid body under the action of an impulsive force.

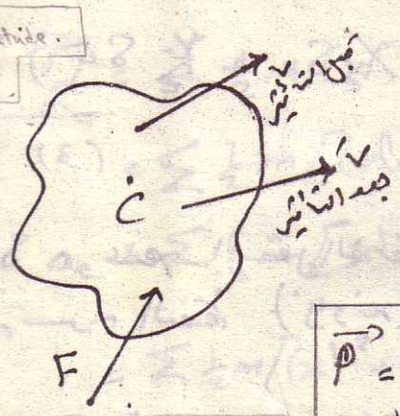
الحركة المستوية للجسم الجاسئ تحت تأثير قوة دفعية :

١- القوة الدفعية Impulsive Force

هي قوة متناهية من الكبر حيث المقدار وتعمل لفترة زمنية متناهية من الصغر. وينحصر تأثيرها من الجسم على تغيير كمية حركة فقط بعد اجراء تغيير محوس من موضع الجسم وتقاس القوى الدفعية بدنوتن.

حيث الدفع هو : اذا اثرت قوة دفعية مقدارها F من جسم جاسئ لفترة زمنية صغيرة جدا فان دفع هذه القوة يعرف بما يأتي

I.F
1) Very large in magnitude.
2) acts for a very short time → 0
3) changes the momentum only.
4) hardly the position of the body is affected.



$$\vec{P} = \int_0^\tau \vec{F}\,dt = \int_0^\tau \frac{d}{dt}(m\vec{v})\,dt = \text{Impulse}$$

The I.F is measured by its Impulse.

P of the rigid body, $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$, F of the acting force

P is the impulse due to the impulsive force F.

التغير في كمية الحركة = الدفع

The change in Linear Momentum $= \vec{P} = [m\vec{v}]_0^\tau = m\vec{v}' - m\vec{v}_0 =$ Impulse

٢- معادلات الحركة :

اذا تحرك جسم جاسئ تحت تأثير قوى دفعية مركبتاه (X, Y) لفترة زمنية صغيرة جدا فان معادلات حركة هذا الجسم تأخذ الصورة الاتية :

وهما- معادلات الحركة الانتقالية [حركة مركز الثقل]

The eqts of linear motion (for the Center of mass)

$$M\ddot{\tilde{x}} = X \qquad M\ddot{\tilde{y}} = Y$$

$$\therefore \int_0^\tau M\ddot{\tilde{x}}\,dt = \int_0^\tau X\,dt$$

$$[M\dot{\tilde{x}}]_0^\tau = P_x$$

In fact, the Impulse is a quantity we observed when we wanted to describe the transient state the body passes through during the moment of action of the external force on the body.

$\underline{P} = \int_0^\tau \underline{F}\,dt = \int_0^\tau \frac{d m\underline{v}}{dt}\,dt = [m\underline{v}]_0^\tau = m\underline{v}' - m\underline{v}$ = Impulse = Change in linear momentum

eqtn. of linear motion $\equiv \underline{P} = M(\underline{v}' - \underline{v})$ (1) . eqtn of rotational motion $\underline{h}_0' - \underline{h}_0 = \sum_{+i} (\underline{r}_i \times \underline{P}_i)$ (2)

of the Center of mass due to the impulsive force $\underline{F}$

$$M[\dot{x}_x' - v_x] = P_x \quad (1)$$

$$M[v_y' - v_y] = P_y \quad (2)$$

h_0 is the force the body encounters, which changes its uniform rotation

حيث (v_x, v_y) سرعة مركز الثقل قبل التصادم مباشرة.

، (v_x', v_y') ~ ~ ~ بعد ~ ~

Rotational Motion

(ii) - الحركة الدورانية

Rate of change of angular momentum $= \dot{h}_0 = L_0 = \sum (Y_e x - X_e Y) = \sum_{+i} (\underline{r}_i \times \underline{F}_i)$

= Total moments due to external forces acting on the body. $= L$

بالضرب في dt والتكامل $\therefore \int_0^\tau \dot{h}_0\,dt = \sum \left[\int_0^\tau Y_e x\,dt - \int_0^\tau X_e y\,dt\right]$

$$[h_0]_0^\tau = \sum \left[x \int_0^\tau Y_e\,dt - y \int_0^\tau X_e\,dt\right]$$

The Change in Angular Momentum $= h_0' - h_0 = \sum (x P_y - y P_x) = \sum_{+i} (\underline{r}_i \times \underline{P}_i)$ (3)

= The algebraic sum of the moment of Impulses about the point C.

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & 0 \\ P_x & P_y & 0 \end{vmatrix} = \underline{r} \times \underline{P}$

التغير في كمية الحركة الزاوية = مجموع عزوم القوى حول O

من (1)، (2) ينتج أن

١- " التغير في كمية الحركة الخطية في اي اتجاه = مركبة الدفع في هذا الاتجاه

٢- " التغير في كمية الحركة الزاوية حول اي نقطة = مجموع عزوم الدفوع حول هذه النقطة

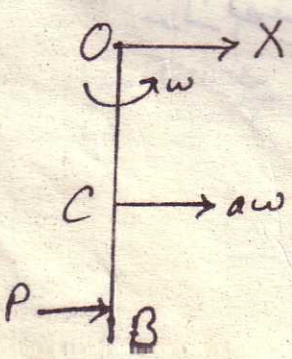
/ PU'KA$\int$n / the forceful striking together of two hard objects.

Center of Percussion

مركز الصدمة

مثال ١

قضيب منتظم طوله $2a$ يمكنه ان يدور بسهولة حول احد طرفيه المثبت في نقطة فاذا وقع هذا القضيب بصدمة عمودية عليه عندما كان في وضع الاتزان الرأسي عند نقطة على بعد x من الطرف الثابت. اوجد السرعة الزاوية للقضيب بعد الصدمة وبعد المسافة الدافعة عند المفصل.



نفرض ان القضيب يبدأ في دورانه حول O فعجل بسرعة زاوية ω وان رد الفعل الدافع عند المفصل يساوي X في اتجاه عمودي على القضيب OB

* study the motion before the collision i.e. use eqns of motion concerning linear, rotational motion.
* get the velocity (angular, linear) of the body just before collision $\Rightarrow$
* apply eqns of motion due to an impulsive force. $\Rightarrow$ study the motion after it.

[X دفع وليست قوة]

دفع الصدمة = P

Linear motion

$$m(a\omega - 0) = X + P \qquad (1)$$

rotational motion

$$I_O(\omega - 0) = xP \qquad (2)$$

لحل المعادلتين (1) و (2) يمكن حذف أحد المجاهيل (ω, X)

$$\therefore \frac{4}{3}ma^2\omega = xP$$

$$\therefore a\omega = \frac{3xP}{4ma} \qquad (3)$$

بالتعويض في (1)

$$\therefore X = \frac{m \times 3xP}{4ma} - P$$

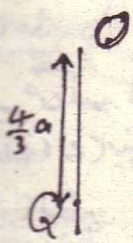
Impulsive reaction at the joint O.

$$= X = P\left[\frac{3}{4}\frac{x}{a} - 1\right]$$

لاحظ أن:

رد الفعل الدفعي للمفصل X يتلاشى عندما

$$x = \frac{4}{3}a$$



من هذه الحالة تسمى النقطة Q التي حدثت عندها الضربة "مركز الصدمة"

تعريف:

مركز الصدمة هو النقطة التي اذا ضربت عندها الضربة يتلاشى رد الفعل الدفعي عند المفصل.

The Center of percussion is the point that if the bar is hit there the impulsive reaction at the joint vanishes.

لاحظ أن:

مركز الصدمة ومركز التذبذب للقضيب ينطبقان

The Center of percussion and the Center of oscillation for the bar coincide.

We should distinguish between two cases in which an impulsive force acts on a rigid body:

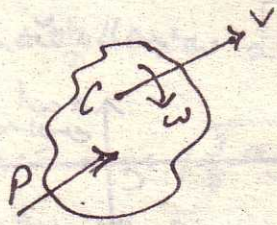
1. If the body were fixed at some point, then the Body starts to move with angular velocity about this point only.
2. If the body were free to move, then its center of mass gains a linear velocity, in addition, the whole body gains an angular velocity about C.

ملاحظة هامة:

اذا أثرت قوة دفعية في جسم جاسئ فانه يجب التمييز بين الحالتين المختلفتين الآتيتين:

١- اذا كان الجسم مثبتا من نقطة فانه يبدأ في الحركة بسرعة زاوية حول هذه النقطة فقط.

٢- اذا كان الجسم حرا الحركة فانه مركز ثقله C يكتسب سرعة خطية والجسم بأكمله يكتسب سرعة زاوية حول C



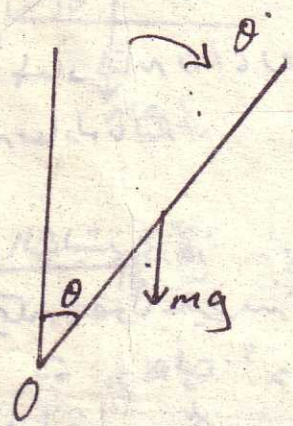
May. 91 Sep. 90

مثال:

قضيب منتظم طوله $2a$ يدور بسرعة حول محور ثابت عند احد طرفيه. فاذا بدأ في الحركة من السكون عندما كان رأسيا الى اعلى ثم اصطدم بعائق رأسي عند مركز ثقله عندما أصبح افقيا فاذا كان معامل المرونة بين القضيب والعائق يساوي $\frac{1}{2}$. اثبت ان رد الفعل الدفعي للمحور يساوي $\frac{1}{4}$ الدفع الناتج عن الصدمة وان القضيب يرتد بعد الصدمة الى اعلى فلول زاوية $\sin^{-1}\frac{1}{4}$.

before Collision

أولا: الحركة الدورانية قبل الصدمة



$$I_O\ddot{\theta} = L_O \qquad \text{1st}$$

$$\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} = mga\sin\theta$$

$$a\ddot{\theta} = \frac{3}{4}g\sin\theta \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2 = -\frac{3}{4}g\cos\theta + Const \qquad (2)$$

عندما $\theta = 0$ تكون $\dot{\theta} = 0$ $\Longleftarrow$ $Const = \frac{3}{4}g$

$$\therefore a\dot{\theta}^2 = \frac{3}{2}g(1-\cos\theta) \qquad (3)$$

وتكون عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$ [يكون الجسم رأسيا]:

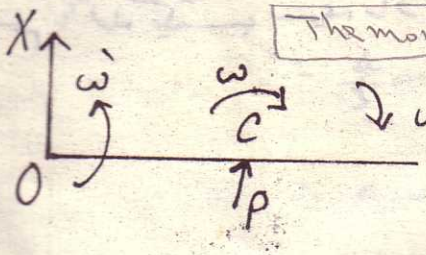
$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

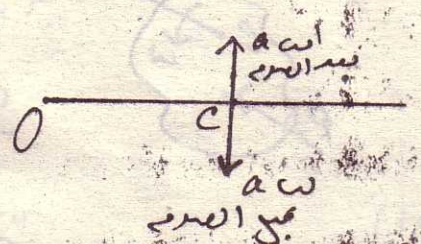
$$\therefore a\dot{\theta}^2 = \frac{3}{2}g$$

$$\therefore \dot{\theta} = \omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}}$$

The moment of Collision

ثانيا: الحركة الدقيقة اثناء الصدم:





$$\downarrow$$

"linear part" $$m[a\omega' - (-a\omega)] = P + X$$

$$ma(\omega' + \omega) = P + X \qquad (1)$$

"rotational part" $h_0' - h_0 =$ مجموع عزوم القوى حول O

$$\downarrow$$

$$I_0[\omega' - (-\omega)] = aP \qquad (2)$$

حالة لدينا معادلتان (1)، (2) فيهما ثلاث مجاهيل (X, P, ω'). لذلك لابد من معادلة ثالثة.

Relative velocity for the two bodies after Collision, v'
$= -$ (Coefficient of elasticity μ) $\times$
relative velocity for the two bodies before Collision v

$\frac{v'}{v}\Big|_r = -\mu$ Newton's experimental law. :العلاقة الثالثة

يمكن الحصول عليها من قانون نيوتن التجريبي

[السرعة النسبية للجسمين بعد التصادم = - معامل المرونة × السرعة النسبية للجسمين قبل التصادم]

Kinematical Conditions

(ii)

$$\therefore \frac{a\omega' - 0}{v|_r} = -\frac{1}{2}\left(\frac{-a\omega - 0}{v|_r}\right)$$

$$a\omega' = \frac{1}{2}a\omega \Longrightarrow \omega' = \frac{1}{2}\omega$$

$$\omega' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3g}{2a}} = \sqrt{\frac{3g}{8a}}$$

(2) m

$$\frac{4}{3}ma^2(\omega' + \omega) = aP$$

$$\therefore P = \frac{4}{3}ma \times \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3g}{2a}} = m\sqrt{6ag}$$

(1) m

$$X = ma \times \frac{3}{2}\omega - P = \frac{3}{2}ma\omega - 2ma\omega$$

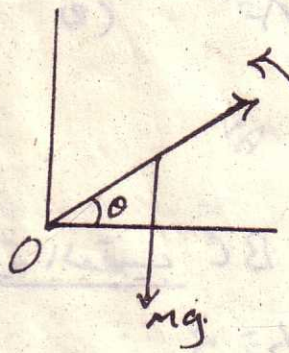
$$= -\frac{1}{2}ma\omega = -\frac{1}{2}ma\sqrt{\frac{3g}{2a}}$$

$$\therefore X = -m\sqrt{\frac{3}{8}ag}$$

$$\therefore \frac{X}{P} = m\sqrt{\frac{3ag}{8}} \times \frac{1}{m\sqrt{6ag}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{X}{P} = \frac{1}{4} \Longrightarrow X = \frac{1}{4}P$$

After Collision



$$I_O\ddot{\theta} = L_O$$ 3rd

$$\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} = -mg \times a\cos\theta$$

$$a^2\ddot{\theta} = -\frac{3}{4}g\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2 = -\frac{3}{4}g\sin\theta + C$$

$$C = \frac{3}{16}g \Longleftarrow \theta = 0 \text{ when } \dot{\theta} = \omega' = \sqrt{\frac{3g}{8a}}$$

$$\therefore \frac{1}{2}a\dot{\theta}^2 = -\frac{3}{4}g\sin\theta + \frac{3}{16}g$$

$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = 0$ i.e. when θ reaches it maximum value.

$\dot{\theta} = 0$ عندما يكون الميل أكبر زاوية

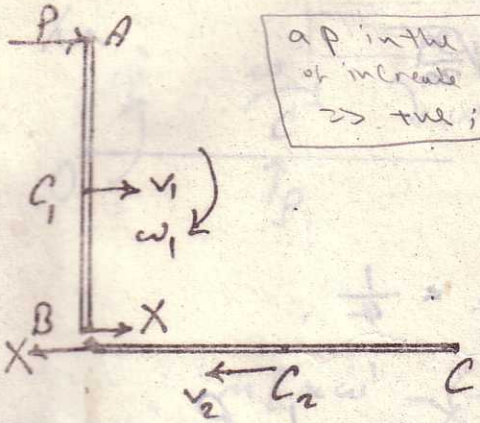
$$\frac{3}{4}g\sin\theta = \frac{3}{16}g \Longrightarrow \sin\theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1}\frac{1}{4}$$

Mug 30

مثال ٣

قضيبان متماثلان كتلة كل منهما m وطوله 2a يتصلان اتصالا مفصليا سلسا عند B . وضع على نضد افقى أملس بحيث كانت $A\hat{B}C = 90^\circ$ ثم دفع القضيب AB عند A بدفع P عمودي عليه في الاتجاه BC . اثبت ان السرعة الابتدائية الذى يتحرك به الطرف a ينتج للصدم تأدى ثمن امثال السرعة الابتدائية للطرف C وان طاقة الحركة التى تكتسبها المجموعة تساوى $\frac{8P^2}{5m}$



ap in the direction of increase of ω_1
$\Rightarrow$ the ; $\chi a = -ve$

1st

حركة القضيب AB

$$m(v_1 - 0) = P + X \quad (1)$$

$$I_{C_1}(\omega_1 - 0) = aP - aX \quad (2)$$

$$\frac{1}{3}ma^2\omega_1 = aP - aX$$

$$\frac{1}{3}ma\omega_1 = P - X \quad (2)$$

حركة القضيب BC

$$mv_2 - 0 = X \quad (3)$$

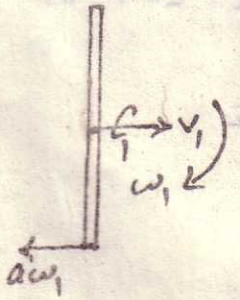
هذه المعادلات الثلاث لا تكفى لتعيين الجاهيل الأربع (X, ω_1, v_2, v_1)

2nd

Kinematical Conditions

العلاقة الرابعة تحصل عليها من:

سرعة الطرف B كجزء من القضيب AB = سرعة كجزء من القضيب BC



وتكتب

$$V_B \text{ (كجزء من القضيب AB)} = V_{C_1} + V_{B\to C_1}$$

$$= V_1 - a\omega_1 \quad \text{الى اليمين}$$

$$V_B = V_1 - a\omega_1$$

V_B (BC مركبة السرعة) = V_2 الى اليسار

$$V_1 - a\omega_1 = -V_2 \qquad (4)$$

①

$$\therefore mV_1 - ma\omega_1 = -mV_2$$

$$P + X - (3P - 3X) = -X$$

$$\therefore X = \frac{2}{5}P \qquad (i)$$

(1) نقطة

$$mV_1 = P + \frac{2}{5}P = \frac{7}{5}P$$

$$V_1 = \frac{7P}{5m} \qquad (ii)$$

$$\frac{1}{3}ma\omega_1 = \frac{2}{5}P \qquad (2) \text{ نقطة}$$

$$a\omega_1 = \frac{9P}{5m} \qquad (iii)$$

$$V_2 = \frac{2P}{5m} \qquad (iv) \qquad (3) \text{ نقطة}$$

سرعة الجزيء A

②

$$V_A = V_{C_1} + V_{A \to C_1}$$

$$= V_1 + a\omega_1 = \frac{7P}{5m} + \frac{9P}{5m} = \frac{16P}{5m}$$ الى اليمين

$V_C = V_2 = \frac{2P}{5m}$ الى اليسار

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{16P}{5m} \times \frac{5m}{2P} = 8$$

طاقة الحركة

③

$$T_{AB} = \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

$$= \frac{1}{4}m \times \frac{49P^2}{25m^2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}ma^2 \times \frac{81P^2}{25m^2a^2}$$

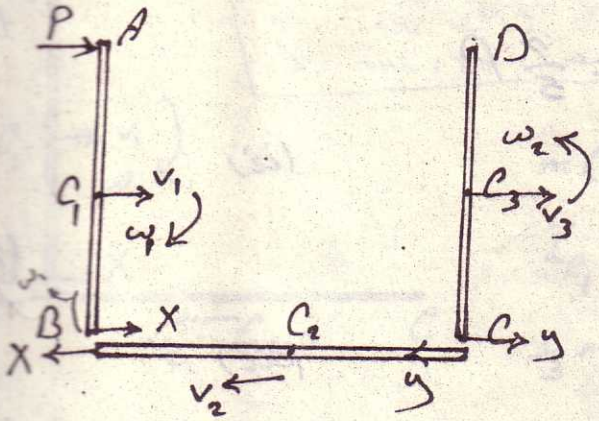
$$= \frac{38}{25}\frac{P^2}{m}$$

$$T_{BC} = \frac{1}{2}mV_2^2 = \frac{1}{2}m \times \frac{4P^2}{25m^2} = \frac{2P^2}{25m}$$

$$T_{total} = \frac{38P^2}{25m} + \frac{2P^2}{25m} = \frac{8P^2}{5m}$$

+ مثال ٤ May 2

ثلاثة قضبان AB ، BC ، CD كتلة كل منها m وطول كل منها 2a متصل ببعضها اتصالا مفصليا عند B ، C . وضعت المجموعة على نضد افقي أملس بحيث تكون ثلاثة اضلاع منه مربع . اذا ضرب القضيب AB بدفع أفقي P في اتجاه عمودي عليه . بحسب الاندفاع الابتدائي للنقطتين A ، D ثم أوجد طاقة حركة المجموعة المتولدة بالدفع .



1st

حركة القضيب AB

$$m(v_1 - 0) = P + X \quad (1)$$

$$I_{C_1}(\omega_1 - 0) = aP - aX$$

$$\frac{1}{3}ma^2\omega_1 = aP - aX$$

$$ma^2\omega_1 = 3P - 3X \quad (2)$$

حركة القضيب BC

$$mv_2 - 0 = X + y \quad (3)$$

حركة القضيب CD

$$m(v_3 - 0) = y \quad (4)$$

$$\frac{1}{3}ma^2(\omega_2 - 0) = ay$$

$$ma\omega_2 = 3y \quad (5)$$

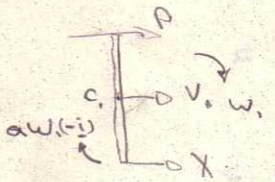
2nd

Kinematical Conditions

هذه المعادلات لا تكفي لحل المجاهيل $(v_1, v_2, v_3 ; \omega_1, \omega_2 ; X, y)$

سرعة الطرف B كجزء من القضيب AB = سرعة الطرف B كجزء من القضيب BC

سرعة B بالنسبة لـ AB = $V_{C_1} + V_{B\to G}$



الى اليمين $= V_1 - a\omega_1$

سرعة B بالنسبة لـ BC $\rightarrow i$ $V_1 i - a\omega_1 i =$
$(V_1 - a\omega_1)\ i$

الى اليسار $V_{C_2} = V_2$

$\therefore V_1 - a\omega_1 = -V_2$ $\boxed{V_1 - a\omega_1 = -V_2}$

سرعة C بالنسبة لـ BC = سرعة C بالنسبة لـ DC

سرعة C بالنسبة لـ BC = V_2 لليسار

سرعة C بالنسبة لـ DC $V_3 + a\omega_2$ للميمين

$\therefore -V_3 + a\omega_2 = V_2$ (7)

$\boxed{-V_3 - a\omega_2 = V_2}$

بضرب (6) في m

$mV_1 - ma\omega_1 = -mV_2$

$P + X - 3P + 3X = -X - y$

$5X - 2P + y = 0$ (8)

بضرب (7) في m

$-mV_3 - ma\omega_2 = mV_2$

$-y - 3y = X + y$

$\therefore X = -5y$ (9)

بالتعويض في (2) من (1)

$$\therefore y = 2P + 25y$$

$$\therefore y = -\frac{1}{12}P$$

$$X = \frac{5}{12}P \qquad \text{من (1)}$$

$$mv_1 = P + \frac{5}{12}P = \frac{17}{12}P \qquad \text{من (2)} \therefore$$

$$v_1 = \frac{17P}{12m}$$

$$ma\omega_1 = 3P - \frac{5}{4}P = \frac{7}{4}P \qquad \text{من (3)}$$

$$\therefore a\omega_1 = \frac{7P}{4m}$$

$$mv_2 = \frac{5}{12}P - \frac{1}{12}P \qquad \text{من (4)}$$

$$v_2 = \frac{P}{3m}$$

$$v_3 = \frac{-P}{12m} \qquad \text{من (5)}$$

$$a\omega_2 = \frac{-P}{4m}$$

سرعة الطرف A الابتدائية =

$$v_{A\to C_1} + v_{C_1}$$

$$= v_1 + a\omega_1 = \frac{17}{12}\frac{P}{m} + \frac{7P}{4m}$$

$$= \frac{19P}{6m}$$

سرعة الطرف D الابتدائية =

$$v_{D\to C_3} + v_{C_3}$$

$$= v_3 - a\omega_2 = \frac{-P}{12m} + \frac{P}{4m}$$

$$= \frac{P}{6m}$$

$$\left|\frac{v_A}{v_D}\right| = \frac{19P}{6m} \times \frac{6m}{P} = 19$$

∴ سرعة A الابتدائية = 19 سرعة D الابتدائية

حسب طاقة الحركة :

$$T_{AB} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{17P}{12m}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}ma^2 \times \left(\frac{7P}{4ma}\right)^2$$

$$= \frac{436P^2}{288m}$$

$$\therefore T_{AB} = \frac{109}{72}\frac{P^2}{m}$$

$$T_{BC} = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m \times \frac{P^2}{9m^2} = \frac{P^2}{18m}$$

$$T_{CD} = \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2$$

$$= \frac{1}{2}m \times \frac{\rho^2}{144m^2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} ma^2 \times \frac{\rho^2}{16m^2a^2}$$

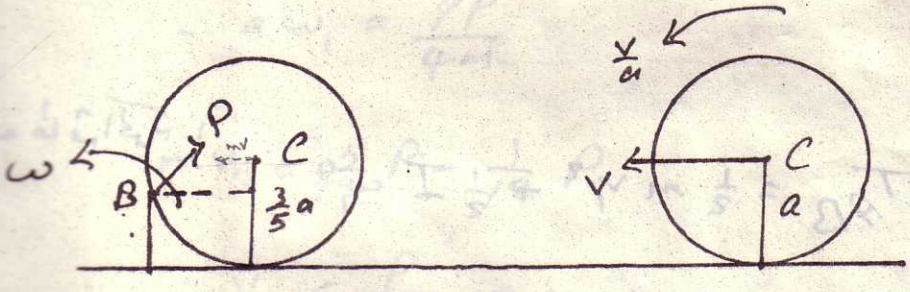
$$= \frac{\rho^2}{72m}$$

$$T_{total} = \frac{109\rho^2}{72m} + \frac{\rho^2}{18m} + \frac{\rho^2}{72m} = \frac{114}{72}\frac{\rho^2}{m}$$

$$\therefore T_{total} = \frac{19\rho^2}{12m}$$

مثال ٥

تتدحرج كره مصمتة نصف قطرها a على مستوى افقى O عندما كان مركزها يتحرك بسرعه V اصطدمت بعائقه ارتفاعه الرأسى $\frac{3}{5}a$.
اثبت ان الشرط اللازم كى تتخطى الكره هذا العائقه هو $V > \sqrt{\frac{2199}{4}}$



حيث السرعه الخطيه للكره قبل الصدمه = V
∴ السرعه الزاويه للكره قبل الصدمه = $\frac{V}{a}$

حيث ان الصدمه التى تحدث للكره تؤثر دفعها عند النقطه B

∴ بأخذ العزوم حول B وتطبيق القاعده II نجد أن

$h_B' - h_B$ = عزم الدفع حول B = ٥ ⊛

بعد الصدمة ، اى B ثابتة $= h_B'$ =

$$h_B' = I_B \omega = \omega\left(ma^2 + \frac{2}{5}ma^2\right)$$

$$= \frac{7}{5}ma^2\omega$$

حيث ω هى السرعة الزاوية للكرة حول B بعد الصدمة

وحيث ان: قبل الصدمة كانت النقطة B متحركة (i.e on the sphere)

كمية الحركة الزاوية لمركز الثقل C تساوى حول B + h_C = h_B

$$I_C \times \frac{v}{a} + mv \times \frac{2}{5}a = \frac{2}{5}ma^2 \times \frac{v}{a} + \frac{2}{5}mav$$

$$= \frac{4}{5}mav$$

$h_B' - h_B = 0$ ⊛

$$\therefore \frac{7}{5}ma^2\omega - \frac{4}{5}mav = 0$$

$$\therefore a\omega = \frac{4}{7}v$$

ملحظة:

الكرة يمكنها تخطى هذا العائق اذا كانت:

طاقة حركة بعد الصدمة > الشغل اللازم لرفع ثقلها فوق العائق

$$\frac{1}{2}I_B\omega^2 > mg \times \frac{3}{5}a$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}ma^2\right)\left(\frac{16v^2}{49a^2}\right) > \frac{3}{5}mag$$

$$\therefore v^2 > \frac{21}{8}ag$$

$$\therefore v > \sqrt{\frac{21ag}{8}}$$

تمارين على الباب الرابع

١ تثبت احد طرفي خيط خفيف في نقطة ثابتة O ولف الخيط حول محيط قرص دائري منتظم نصف قطره a وكتلته m . اذا ترك القرص ليتحرك ابتداء من السكون من مستوى رأسي مع الوضع الذي كان فيه جزء الخيط المستقيم رأسيا.
اوجد مقدار العجلة الزاوية التي يتحرك بها مركز القرص واستنتج الخيط.

٢ تثبت حلقة صغيرة كتلتها m عند طرف قضيب منتظم طوله 2a وكتلته m وتتزلج الحلقة على سلك دائري افقي نصف قطره b وثبت القضيب في مستوى رأسي مع السلك عندما كان رأسيا.
اذا ابعد القضيب ليتحرك مع السلك عندما كان رأسيا.
اوجد سرعة الزاوية وردي الفعل عند طرفه عندما يميل على الرأسي بزاوية θ.

٣ AB قضيب منتظم طوله 2a وكتلته m يرتكز بطرفه A على حائط رأسي أملس وطرفه B على ارض افقية ملساء. اذا بدأ القضيب يتزلج من مستوى رأسي مع السلك عندما كانت زاوية ميله عن الحائط تساوي α.
اوجد سرعة الزاوية وردي الفعل عند طرفيه عندما تصبح زاوية ميله عن الحائط تساوي θ.
عين السرعة الزاوية للقضيب عندما يترك الحائط ثم عندما يصبح افقيا.

٤ تثبت حلقة صغيرة كتلتها m في الطرف A للقضيب المنتظم AB الذي طوله 2a وكتلته m وتتزلج الحلقة على قضيب افقي املس مثبت. عند الابتداء كان القضيب AB ملاصقا للقضيب المثبت ثم ترك ليتحرك مع السكون.
اوجد السرعة الزاوية للقضيب AB عندما يصنع زاوية θ مع القضيب المثبت.

٥ تتدحرج كرة وصفحة منتظمة على السطح الداخلي لكرة ثابتة. اذا بدأت الحركة مع السكون عندما كان الخط الواصل بين المركزين رأسيا. برهن أن الانزلاق يحدث عندما يصنع خط المركزين مع الرأسي زاوية $\cos^{-1}\frac{2}{3}$

تحقق المعادلة

$$2\sin\beta = \mu(17\cos\beta - 10)$$

حيث μ معامل الاحتكاك . اوجد قيمة β اذا كانت $\mu = \frac{1}{3}$.

٦ اسطوانة مصمتة نصف قطرها a تدور حول محورها الأفقي بسرعة زاوية ω ، وضعت برفق على مستوى خشن يميل على الأفق بزاوية α فاذا كانت ω من الاتجاه الذي يجعل الكرة الاسطوانة تميل للصعود أعلى المستوى وكانت μ بين المستوى والاسطوانة تساوي $\tan\alpha$.
اثبت ان محور الاسطوانة يظل ساكنا في مقاة لمدة $\frac{a\omega}{2g\sin\alpha}$ ثم يتحرك بعد ذلك حركة تدحرجية بعجلة ثابتة قدرها $\frac{2}{3}g\sin\alpha$.

٧ تدحرج كرة منتظمة مصمتة كتلتها m ونصف قطرها a على السطح الخارجي لكرة منتظمة مصمتة كتلتها M ونصف قطرها b ويمكن أن تدور حول مركزها المثبت . اذا كان الاحتكاك كافيا لمنع الانزلاق .
برهن انه اذا بدأت المجموعة من السكون عندما كان خط المركزين رأسيا فان الكرتين تنفصلان عندما يصنع خط المركزين مع الرأسي زاوية $\cos^{-1}\frac{10(M+m)}{17M+15m}$.

٨ تتزن كرة ملساء كتلتها m فوق كرة اخرى ملساء كتلتها 17 موضوعة على نضد افقي املس . اذا ازيحت المجموعة قليلا من هذا الوضع عند الاستقرار .
برهن ان الكرتين تنفصلان عندما يصنع خط المركزين زاوية θ مع الرأسي وتحقق بالمعادلة

$$\frac{m}{M+m}\cos^3\theta - 3\cos\theta + 2 = 0$$

٩ في التمرين السابق اذا تدحرجت الكرة العليا التي كتلتها m ونصف قطرها a فوق الكرة السفلى التي كتلتها M ونصف قطرها b والموضوعة على نضد افقي املس .
برهن ان طاقة الكرتين متساويتان عندما

$$(7M + 5m\sin^2\theta)(a+b)\dot{\theta}^2 = 10(M+m)g(1-\cos\theta)$$

حيث θ هي الزاوية التي يصنعها خط المركزين مع المحور الأفقي عند الزمن t، $\theta = 0$ و $\dot{\theta} = 0$ عند $t = 0$.

١٠ كرة مصمتة نصف قطرها a بدأت في الدحرجة على السطح الداخلي لأسطوانة مجوفة مثبتة كان محورها أفقيا [نصف قطرها $a+b$] فإذا كانت سرعة مركز الكرة عندما كانت في أخفض موضع هي v_0.
أثبت أن الشرط اللازم كي تتم دورة كاملة هو $v_0^2 > \frac{27}{7} bg$

١١ يمكن لقضيب منتظم OA كتلته M وطوله $2a$ أن يدور في مستوى رأسي حول طرفه المثبت O. بدأ القضيب يتحرك من سكون عندما كان رأسيا إلى أعلى ولحاجز أفقي اصطدم به الطرف المثبت عند النقطة B من القضيب بحيث تبعد مسافة b عن O.
برهن أن الدفع الذي أثر به الحائط على القضيب عند B يساوي
$M\sqrt{49a^3/3b^2}$
وأن رد الفعل الدفعي عند A يساوي
$M\sqrt{\frac{39}{2}}\left[1 - \frac{4a}{3b}\right]$
رأسيا إلى أعلى. أوجد قيمة b بحيث تتلاشى رد الفعل الدفعي عند A

١٢ $ABCD$ صفيحة منتظمة على شكل مربع طول ضلعه $2a$ ساكنة على نضد أفقي أملس. أثر على الصفيحة عند A دفع أفقي وكان اتجاه خط A يصنع زاوية θ مع القطر AC.
أثبت أن خط عمل الدفع يصنع زاوية $\tan^{-1}(\frac{1}{4}\tan\theta)$ مع AC وأن الزاوية المحصورة بين اتجاه سرعة A وخط عمل الدفع لا يمكن أن تزيد عن $\tan^{-1}\frac{3}{4}$.

١٤- $ABCD$ قرص مربع منتظم كتلته M وطوله ضلعه $2a$ موضوع على لضد افقي املس. ضرب القرص عند A بجسيم كتلته m يتحرك على لسطح بسرعه V في الاتجاه AB. اذا التصق الجسيم بالقرص ودار معه.

اوجد الحركه الناتجه واثبت ان السرعه لزاويه التي تدور بها المجموعه تساوي

$$\frac{3mV}{2a(M+4m)}$$